This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 2589.02.3

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

GEORGE HAYWARD, M.D.,

OF BOSTON,

(Class of 1809).

# ÉTUDE

DE QUELQUES

# SURFACES ALGÉBRIQUES

## ENGENDRÉES PAR DES COURBES

## DU SECOND ET DU TROISIÈME ORDRE

---

DISSERTATION INAUGURALE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GAND

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR SPÉCIAL

PAR

M. STUYVAERT

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE GAND

GAND

LIBRAIRIE GÉNÉRALE DE AD. HOSTE, ÉDITEUR

Rue des Champs, 47

1902

# ÉTUDE

DE QUELQUES

# SURFACES ALGÉBRIQUES

ENGENDRÉES PAR DES COURBES

DU SECOND ET DU TROISIÈME ORDRE

# AVANT-PROPOS

La théorie des surfaces réglées a pour suite logique l'étude des formes engendrées par des courbes, planes ou gauches, d'ordre supérieur au premier.

Le domaine où nous allons pénétrer, est d'une étendue considérable et les géomètres s'en sont relativement peu occupés. On peut prévoir que les méthodes d'investigation actuellement connues suffiront à peine pour les cas les plus simples, à savoir ceux où les courbes génératrices sont des coniques ou des cubiques gauches.

Toutes les coniques de l'espace sont en nombre $\infty^8$. Celles de ces courbes qui satisfont à $i$ conditions forment une multiplicité de l'ordre $\mu = 8 - i$. Nous excluons d'abord les cas où l'on a $\mu > 2$; il se peut que ces cas présentent de l'intérêt; ce seraient des généralisations de la théorie des complexes de droites; mais ils ne peuvent entrer dans le plan que nous nous sommes proposé.

Quant aux systèmes doublement infinis de coniques, ils n'engendrent pas une figure, dans le sens ordinaire du mot; mais leurs plans enveloppent une surface. Dans une Note présentée à l'Académie royale de Belgique, nous avons déterminé la classe de cette surface, lorsque les courbes génératrices sont assujetties à

s'appuyer sur des directrices rectilignes ou autres et nous avons indiqué quelques conséquences relatives à des systèmes simplement infinis de coniques. Le contenu de cette Note, remanié et condensé, nous fournira la matière de notre Chapitre I.

Quelques cas particuliers de systèmes simplement infinis de coniques seront traités avec plus ou moins de détails dans le Chapitre II.

Pour les cubiques gauches, des considérations analogues à celles qui précèdent peuvent être formulées. Mais le nombre des cas possibles est beaucoup plus grand; d'autre part, la difficulté croissante du sujet nous oblige à restreindre beaucoup le champ à explorer. Nous nous bornons, dans le Chapitre III, à considérer un système spécial de $\infty^2$ cubiques et à examiner quelques formes qui prennent naissance quand on soumet ces courbes à une condition de plus.

Nous croyons que ces matières doivent tirer leur principal intérêt des méthodes utilisées pour les étudier. Nos trois chapitres correspondent à des procédés de recherche différents et, pour ne point trop allonger ce travail, nous avons renoncé à tirer de ces procédés tout ce qu'ils peuvent donner, nous contentant de les illustrer, en quelque sorte, par des exemples.

Qu'il nous soit permis de remercier Messieurs les Professeurs C. Servais, J. Neuberg et A. Demoulin pour l'appui bienveillant qu'ils nous ont prêté pendant la rédaction du présent travail.

# CHAPITRE I.

## Sur les plans coupant un système de lignes de l'espace en six points d'une conique.

**1.** L'étude des coniques qui s'appuient, par plus de cinq points, sur un système de lignes de l'espace, apparaît comme une extension de la théorie des plurisécantes des systèmes de courbes gauches.

Les étapes naturelles de cette recherche sont les suivantes.

1° Soient des lignes $c_n$, $c_{n'}$, ... dont l'ordre total est $m$; on cherche l'enveloppe des plans des coniques qui passent par $i$ points de $c_n$, par $i'$ points de $c_{n'}$, $\cdots$, $i + i' + \cdots$ étant égal à 6. Lorsque $m$ est égal ou supérieur à six, ces courbes sont en nombre doublement infini et leurs plans enveloppent une surface.

2° Si $m \geq 7$ et si $i + i' + \cdots = 7$, les coniques en nombre simplement infini engendrent une surface et leurs plans enveloppent une développable.

3° Si $m \geq 8$ et $i + i' + \cdots = 8$, le nombre des coniques satisfaisant aux conditions énoncées est fini.

4° Si $m \geq 9$ et $i + i' + \cdots = 9$, il n'y a pas, en général, de coniques satisfaisant aux conditions imposées, mais, lorsqu'il en existe, cette circonstance établit une liaison entre les courbes directrices données.

Nous ne traiterons ici que le premier de ces quatre cas. De plus, les lignes données seront, par hypothèse, des courbes algébriques et même, sauf une exception, des courbes rationnelles.

**2.** Supposons, en premier lieu, que le système se réduise à une courbe unicursale unique $c_m$. Soit $\pi$ un plan qui la coupe en $m$ points dont six sont sur une même conique $c_2$. Par cette conique et par quatre points A, B, C, D, pris à volonté dans l'espace, on peut mener une quadrique $S_2$ qui coupe $c_m$ en $2m$ points dont six sont dans un même plan. Récipro-

quement, si une quadrique $S_2$ passant par A, B, C, D coupe $c_m$ en $2m$ points dont six sont dans un même plan $\pi$, cette quadrique contiendra toute la conique $c_2$ menée par cinq de ces six points et par suite, cette courbe $c_2$ passera aussi par le sixième point; à moins que $S_2$ ne dégénère en deux plans dont l'un sera $\pi$ et dont nous appellerons l'autre $\pi'$. Mais, si A, B, C, D ne sont pas dans un même plan, dans le cas exceptionnel que nous venons de signaler, un de ces quatre points, au moins, sera dans le plan $\pi$ et les autres dans le plan $\pi'$.

Cherchons la classe de la surface enveloppée par les plans tels que $\pi$, ou cherchons combien de plans pareils passent par une droite $d$ prise à volonté, mais ne rencontrant aucune des droites AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Nous devons donc déterminer combien de groupes de six points de $c_m$ sont, à la fois, dans un plan passant par $d$ et sur une quadrique non dégénérée passant par A, B, C, D.

Les quadriques $S_2$ menées par A, B, C, D forment un système linéaire quintuplement infini et marquent, sur la courbe rationnelle $c_m$, une involution $I_5^{2m}$, tandis que les plans menés par $d$ y marquent une involution $I_1^m$. Le nombre des groupes de six points communs à ces deux involutions est, d'après un théorème de M. Le Paige,

$$C_1^{2m-5} \times C_5^{m-1} = (2m-5)\, C_5^{m-1}.$$

$C_i^k$ représentant le nombre de combinaisons simples de $k$ lettres $i$ à $i$.

Mais, dans chacun des quatre plans ($d$A), ($d$B), ($d$C), ($d$D), il y a $C_6^m$ groupes de six points situés sur une quadrique dégénérée et, d'après une remarque antérieure, ces groupes doivent être écartés, de sorte que le nombre des sextuples de points répondant à la question est

$$\nu = (2m-5)\, C_5^{m-1} - 4C_6^m.$$

Tel est aussi le nombre des plans $\pi$ que l'on peut mener par $d$.

*Les plans des coniques reposant, par six points, sur une courbe unicursale $c_m$ enveloppent une surface dont la classe est*

$$(2m-5)\, C_5^{m-1} - 4C_6^m.$$

*Corollaires.* I. Si $m = 6$, on a $\nu = 3$.

II. Une sextique unicursale étant de rang 10, les plans des coniques qui touchent la sextique en un point et la rencontrent encore en quatre autres enveloppent une développable dont la classe est 30.

III. Comme la développable osculatrice à la sextique rationnelle est de classe 12, il y a 36 coniques ayant, avec la sextique, un contact triponctuel et la rencontrant encore en trois autres points.

**3.** Soit un système composé d'une droite $g$ et d'une courbe unicursale $c_m$. Par le raisonnement du n° 2, on voit que, si l'on cherche les quadriques non dégénérées passant par $g$ et par deux points A et B de l'espace et coupant $c_m$ en des groupes de $m$ points dont cinq sont dans un plan mené par une droite $d$, le nombre obtenu est la classe de l'enveloppe des plans des coniques qui s'appuient une fois sur $g$ et cinq fois sur $c_m$.

Un calcul, en tout pareil à celui du n° précédent, donne le résultat que voici.

*Les plans des coniques qui ont un point sur une droite donnée et cinq points sur une courbe rationelle $c_m$ enveloppent une surface dont la classe est*

$$\nu = (2m - 4)\, C_4^{m-1} - 2C_5^m.$$

*Corollaires.* I. Les coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$ et qui reposent, par cinq de leurs points, sur une courbe $c_m$ engendrent une surface dont l'ordre est $\nu$.

II. Si $m = 5$, on a $\nu = 4$, pourvu que la droite $g$ ne rencontre pas $c_5$; car, pour chaque intersection de $g$ et de $c_5$, la classe se réduit, en général, d'une unité.

III. Les plans des coniques touchant $c_5$ et la rencontrant encore en trois points et s'appuyant de plus sur $g$ enveloppent une développable de classe 32. Ou encore, les coniques dont le plan passe par un point et qui reposent, sur $c_5$, par cinq points dont deux coïncidents engendrent une surface dont l'ordre est 32. Si, au lieu de passer par un point, ces plans enveloppent une surface de classe $\mu$, les coniques engendrent une surface dont l'ordre est $32\mu$.

IV. Il y a 36 coniques ayant un contact triponctuel avec $c_5$, reposant encore sur la courbe par deux points et rencontrant de plus une droite $g$. Ou encore, les coniques ayant un contact triponctuel avec $c_5$ et la rencontrant encore en deux points forment une surface du 36e ordre.

**4.** Si le système se compose d'une conique $c_2$ et d'une courbe unicursale $c_m$, on fait passer les quadriques $S_2$ par $c_2$ et par un point A de l'espace; on trouve ce théorème :

*Les plans des coniques qui reposent, par deux de leurs points sur une conique et par quatre autres points sur une courbe $c_m$ enveloppent une surface dont la classe est*

$$\nu = (2m - 3)\, C_3^{m-1} - C_4^m.$$

*Corollaires.* I. Si $c_2$ est le cercle imaginaire de l'infini, $\nu$ est la classe de la surface enveloppée par les plans des cercles qui ont quatre points sur $c_m$.

II. Si $m = 4$, on a $\nu = 4$.

III. Les plans des cercles qui touchent la courbe rationnelle $c_4$ et la rencontrent encore en deux points enveloppent une développable de classe 24. Il y a 24 cercles osculateurs de $c_4$ qui rencontrent encore la courbe, etc.

**5.** Si le système se compose de deux droites $g$ et $g'$ et d'une courbe $c_m$, on mène les quadriques $S_2$ auxiliaires par $g$ et $g'$ (sans autre point fixe) et l'on trouve ce résultat :

*Les plans des coniques qui coupent $c_m$ en quatre points et deux droites données chacune en un point enveloppent une surface de classe*

$$\nu = (2m - 3)\, C_3^{m-1}.$$

*Corollaires.* I. Les coniques qui reposent, par quatre points, sur $c_m$, et par un point sur une droite $g$, et dont le plan passe par un axe fixe $\alpha\beta$ engendrent une surface dont l'ordre est $\nu$.

II. Si $m = 4$ on a $\nu = 5$.

III. Les coniques dont le plan passe par un point fixe, qui touchent la courbe rationnelle $c_4$, la rencontrent encore en deux points et s'appuient en outre sur une droite $g$ engendrent une surface du 30e ordre. Les coniques ayant un contact triponctuel avec $c_4$, la rencontrant encore en un point et s'appuyant de plus sur une droite forment une surface du 30e ordre.

**6.** Si le système se compose d'une cubique gauche $c_3$ et d'une courbe unicursale $c_m$, les quadriques auxiliaires, en nombre $\infty^2$, passeront par $c_3$, sans autre point fixe, et l'on trouve :

*Les plans des coniques qui rencontrent les courbes $c_3$ et $c_m$ chacune en trois points enveloppent une surface dont la classe est*

$$\nu = (2m - 2)\, C_2^{m-1}.$$

*Corollaires.* I. Si $m = 3$, on a $\nu = 4$(*).

II. Si deux cubiques gauches $c_3$ et $c'_3$ n'ont aucun point commun, il y a 64 coniques qui les touchent et les rencontrent encore l'une et l'autre. Il y a 12 coniques osculatrices à $c_3$ et passant par trois points de $c'_3$, et inversement.

**7.** Si le système se compose d'une biquadrique $C_4$ de première espèce et d'une courbe rationnelle $c_m$, les $\infty^1$ quadriques auxiliaires passeront par $C_4$.

*Les plans des coniques qui passent par quatre points de* $C_4$ *et deux points de* $c_m$ *enveloppent une surface de classe*

$$\nu = (2m - 1)(m - 1).$$

Si $m = 2$, on a $\nu = 3$.

Si la courbe $c_m$ est remplacée par deux droites qui ne se coupent pas, les quadriques auxiliaires marquent, sur les deux droites, une correspondance (2, 2); tout plan mené par deux points correspondants contient une conique répondant à la question; la surface enveloppée est donc le lieu des droites qui joignent des points homologues de cette correspondance.

*Les plans des coniques qui rencontrent* $C_4$ *en quatre points et deux droites donnés chacune en un point enveloppent une surface réglée de quatrième classe.*

Cette surface est donc aussi du quatrième ordre. C'est la première dans la classification des surfaces réglées du quatrième ordre de Cayley(**) et la onzième de Cremona(***).

**8.** Bien qu'il n'y ait pas impossibilité absolue à employer les méthodes qui vont suivre pour des systèmes assez généraux, nous nous bornerons, dans les cas ci-après, à examiner des systèmes de directrices dont l'ordre total est 6.

Soient d'abord une cubique gauche $c_3$, une conique $c_2$ et une droite $g$ sans points communs.

En menant des quadriques $S_2$ par $c_3$, il suffit de chercher l'enveloppe

(*) Reye, *Journ. f. Math.* t. 79.
(**) *Phil. Trans.*, 1864.
(***) *Mem. Acc. Bologna* (2), VIII.

des plans passant par deux des intersections de $S_2$ avec $c_2$ et une intersection de $S_2$ avec $g$. Considérons une droite $\alpha\beta$ quelconque de l'espace.

Par tout point A de $g$ passe un plan ($\alpha\beta$, A) qui coupe $c_2$ en deux points situés, avec $c_3$, sur une quadrique $S_2$; celle-ci coupe $g$ en deux points B. Inversement, un point B de $g$ détermine un faisceau de quadriques $S_2$ qui marquent, sur $c_2$, une involution $I_1^4$, tandis que les plans par $\alpha\beta$ y marquent une involution $I_1^2$; ces involutions ont trois couples communs déterminant chacun un plan par $\alpha\beta$ et un point A sur $g$. Il existe donc, entre les points A et B, une correspondance (2, 3) donnant cinq coïncidences.

*Les plans des coniques qui reposent, par trois points sur une cubique gauche, par deux points sur une conique donnés et par un point sur une droite donnée enveloppent une surface de cinquième classe.*

*Corollaires.* Les cercles dont le plan passe par $\alpha\beta$ et qui passent par trois points de $c_3$ engendrent une surface du cinquième ordre. Les cercles dont le plan passe par un point, qui touchent $c_3$ et la coupent encore en un point engendrent une surface du 20e ordre. Les cercles osculateurs d'une cubique gauche engendrent une surface du 15e ordre (*).

**9.** Supposons le système formé par une cubique gauche $c_5$ et trois droites $g$, $g'$, $g''$. Il suffit de compter les plans passant par $\alpha\beta$ qui coupent $g$, $g'$, $g''$ en trois points d'une même quadrique circonscrite à $c_5$.

Soit A un point de $g$; le plan ($\alpha\beta$, A) coupe $g'$ et $g''$ respectivement en B et C; par $c_5$, B et C, il passe une quadrique coupant $g$ en deux points D. Inversement, par un point D de $g$, il passe un faisceau de quadriques circonscrites à $c_5$ et elles marquent, sur $g'$ et $g''$, une correspondance (2, 2); donc il existe quatre plans par $\alpha\beta$ contenant des points correspondants et par suite quatre points A de $g$ répondant à D. Entre les points A et D, il y a donc une correspondance (2, 4) présentant six coïncidences.

*Les plans des coniques qui rencontrent trois droites et qui coupent une cubique gauche en trois points enveloppent une surface de sixième classe.*

*Corollaires.* Les coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$ et qui reposent sur $g$ et $g'$ et rencontrent $c_5$ en trois points engendrent une

(*) Propriété connue : voir Timerding, *Ueber die Kugeln, welche eine cubische Raumcurve mehrfach oder mehrpunktig berühren* (Diss. Strasbourg, 1891).

surface du sixième ordre. Les coniques dont le plan passe par un point, qui s'appuient sur $g$ et $g'$, qui de plus touchent $c_3$ en un point et la rencontrent en un autre engendrent une surface du 24e ordre. Les coniques osculatrices à $c_3$ et s'appuyant sur $g$ et $g'$ engendrent une surface du 18e ordre.

**10**. Soit un système composé de trois coniques $c_2$, $c'_2$, $c''_2$. Les quadriques auxiliaires $S_2$ seront menées par $c''_2$ et par un point A de l'espace.

1° Par un point fixe B de $c_2$, combien peut-on mener de ces quadriques $S_2$ coupant $c_2$ en un point X autre que B et $c'_2$ en deux points Y et Y', de manière que le plan XYY' passe par l'axe $\alpha\beta$ ? Prenons, sur $c_2$, un point X autre que B; le plan ($\alpha\beta$, X) coupe $c'_2$ en Y et Y'; la quadrique $S_2$ menée par $c''_2$, A, B, Y et Y' coupe $c_2$ en trois points Z autres que B. Inversement, prenons, sur $c_2$, un point Z autre que B; les quadriques $S_2$ par $c''_2$, A, B, Z forment un faisceau et marquent, sur $c'_2$, une involution $I^4_1$, tandis que les plans par $\alpha\beta$ y marquent une involution $I^2_1$; les plans menés par $\alpha\beta$ et par les trois couples communs aux deux involutions donnent six points X sur $c_2$; entre les points X et Z, il y a une correspondance (3, 6) et neuf coïncidences.

2° Celà étant, prenons, sur $c_2$, un point quelconque B; le plan ($\alpha\beta$, B) coupe $c'_2$ en P, Q et rencontre encore $c_2$ en un point C, généralement différent de B; la quadrique $S_2$ menée par $c''_2$, A, C, P, Q coupe encore $c_2$ en trois points D autres que C. Inversement, prenons un point D sur $c_2$; d'après ce qui a été dit au 1°, il y a neuf points C de $c_2$ situés, avec deux points de $c'_2$, à la fois dans un plan passant par $\alpha\beta$ et sur une quadrique $S_2$ contenant $c''_2$, A, D, et chacun des neuf plans ($\alpha\beta$, C) donne un nouveau point B sur $c_2$. Entre les points B et D, il existe donc une correspondance (3, 9) et douze coïncidences.

Mais, comme chaque plan coupe $c_2$ en deux points, ces douze coïncidences sont dans six plans seulement, d'où il faut encore déduire le plan ($\alpha\beta$, A) qui correspond à une quadrique $S_2$ dégénérée. On a donc ce théorème.

*Les plans des coniques qui rencontrent deux fois trois coniques données enveloppent une surface de cinquième classe* (*).

---

(*) Ce théorème a été démontré, d'une autre manière, par M. J. Neuberg (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, décembre 1901).

*Corollaires.* Les plans des cercles rencontrant deux coniques chacune en deux points enveloppent une surface de cinquième classe. Les plans des cercles touchant une conique $c_2$ et passant par deux points d'une autre conique enveloppent une développable de 10e classe. Il y a 20 cercles tangents à la fois à deux coniques.

**11.** Si le système se compose de deux coniques et de deux droites, on fait passer les quadriques auxiliaires par ces deux droites, sans autre point fixe. Le raisonnement est le même que dans le n° précédent, mais la réduction finale disparaît.

*Les plans des coniques rencontrant deux coniques données chacune en deux points et deux droites données chacune en un point enveloppent une surface de sixième classe.*

*Corollaires.* Les cercles dont le plan passe par un axe et qui passent par deux points d'une conique $c_2$ et par un point d'une droite $g$ engendrent une surface du sixième ordre. Les cercles dont le plan passe par un point et qui touchent $c_2$ et rencontrent $g$ engendrent une surface du 12e ordre.

**12.** Soit un système formé d'une conique $c_2$ et de quatre droites $g, g', g'', g'''$. Les quadriques auxiliaires $S_2$ passent par $c_2$ et par un point A de l'espace.

1° Par deux points fixes, B sur $g$, C sur $g'$, combien peut-on mener de ces quadriques $S_2$ passant par un point X de $g''$ et un point Y de $g'''$ de manière que X, Y et l'axe $\alpha\beta$ soient dans un même plan? Soit X un point de $g''$; le plan ($\alpha\beta$, X) coupe $g'''$ en un point Y et la quadrique menée par $c_2$, A, B, C, Y coupe $g''$ en deux points Z. Inversement, prenons un point Z sur $g''$; $c_2$, A, B, C, Z déterminent une quadrique $S_2$ coupant $g'''$ en deux points Y et chacun des plans ($\alpha\beta$, Y) donne, sur $g''$, un point X; la correspondance des points X et Z est donc (2, 2) et donne quatre coïncidences.

2° Par un point fixe B de $g$, combien peut-on mener de quadriques $S_2$ passant par des points X de $g'$, Y de $g''$, U de $g'''$, de manière que le plan XYU passe par $\alpha\beta$? D'après les mêmes principes et en appliquant le résultat précédent, on trouve une correspondance (2, 4) et six coïncidences.

3° Enfin on reconnaît, par un procédé identique, qu'il existe $2 + 6 = 8$ plans, par $\alpha\beta$, coupant $g, g', g'', g'''$ en des points d'une

quadrique contenant $c_2$ et A; mais ($\alpha\beta$, A) est un de ces plans et doit être exclu. On a donc ce théorème :

*Les plans des coniques qui s'appuient sur quatre droites données et qui passent par deux points d'une conique donnée enveloppent une surface de septième classe.*

*Corollaires.* I. Les coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$ et qui coupent $c_2$ en deux points en s'appuyant de plus sur $g$, $g'$, $g''$ engendrent une surface du septième ordre. Les coniques dont le plan passe par un point, qui touchent une conique et qui rencontrent trois droites données engendrent une surface du 14e ordre.

II. Les cercles dont le plan passe par un axe et qui reposent sur trois droites enveloppent une surface du septième ordre.

**13.** Soit enfin un système de six droites. Le raisonnement est le même que dans le cas précédent; seulement les quadriques $S_2$ passent par deux des six droites, au lieu de passer par $c_2$ et A; il n'y a donc pas de réduction finale.

*Les plans des coniques qui reposent sur six droites enveloppent une surface de huitième classe*(*).

Nous ferons usage du corollaire suivant.

*Les coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$ et qui reposent sur cinq directrices rectilignes engendrent une surface du huitième ordre.*

Cette surface sera étudiée, avec quelques détails, au Chapitre II.

**14.** Si de toute la discussion qui précède (n° 2 à 13), nous ne retenons que les cas où l'ordre total du système des directices est égal à 6, nous pouvons résumer, de la manière suivante, les résultats obtenus.

---

(*) Ce résultat est connu. M. Hierholzer a résolu la question corrélative et a étudié (*Math. Ann.*, t. 2) le lieu des sommets des cônes du second ordre qui touchent six droites. Le même problème a été repris par Cayley (*Math. Ann.*, t. 4).

Ainsi que nous l'avons annoncé, notre intention n'est pas d'étudier les systèmes simplement infinis de coniques reposant, par sept points, sur des directrices, ni les coniques, en nombre fini, qui reposent, par huit points, sur ces directrices. Mentionnons seulement que M. Luroth (*Journ. f. Math.*, t. 68) et, tout récemment M. J. De Vries (Koninklijke Academie v. Wetenschappen, Amsterdam, septembre 1901) ont donné le nombre des coniques reposant sur huit droites.

*Étant donné, dans l'espace, un ensemble de lignes unicursales d'ordres respectifs $n$, $n'$, ..., de manière que l'on ait*

$$n + n' + \cdots = 6,$$

*si toutes ces lignes sont, deux à deux, sans points communs, les plans qui les rencontrent en six points d'une conique enveloppent une surface dont la classe est égale à*

$$\nu = 8 - (n - 1) - (n' - 1) - \cdots$$

Cette surface contient toutes les quadrisécantes du système de directrices, car tout plan par une quadrisécante coupe ces lignes en six points d'une conique dégénérée; la surface contient aussi évidemment toutes les directrices.

On suppose expressément que les directrices n'ont pas de points communs. Car, si deux des directrices passent par un point M, la classe de la surface enveloppée se réduit, en général, d'une unité : tout plan passant par M coupe, en effet, les directrices en cinq points distincts seulement qui sont toujours sur une conique. La surface de classe $\nu$ dégénère en ce point M et une surface de classe $\nu - 1$. Toutefois, pour être certain que le point M ne doit pas être compté plus d'une fois, il faut traiter quelques exemples par le principe de correspondance appliqué ci-dessus : la réponse est généralement négative.

Ainsi, dans le cas d'une droite, d'une conique et d'une cubique gauche passant par deux points de la conique, les plans des coniques reposant, par six points, sur ce système enveloppent une surface, non plus de la cinquième, mais de la troisième classe. Par suite, les cercles dont le plan tourne autour d'un axe et qui passent par trois points d'une cubique gauche circulaire engendrent une surface du troisième ordre. Et les cercles osculateurs d'une telle cubique gauche engendrent une surface du neuvième ordre.

Un autre exemple a servi de point de départ à M. Reye pour des recherches intéressantes : deux cubiques gauches, ayant un point commun, déterminent, par le procédé que nous étudions ici, une surface de troisième classe; mais ces deux courbes sont aussi sur une surface du troisième ordre. M. Reye(*) examine les relations de ces surfaces; il

(*) Reye, *Beziehungen der allgemeinen Fläche 3ter Ordnung zu einer covarianten Fläche 3ter Classe* (*Math. Ann.*, t. 55).

remarque notamment qu'elles passent toutes deux par les six bisécantes communes des deux cubiques; ces bisécantes forment, sur les deux surfaces, la moitié d'un double-sixain de SCHLÄFLI.

Lorsque le système des directrices comprend des points par où passent plus de deux courbes, la réduction subie par la classe $\nu$ obéit à une loi qui ne paraît pas susceptible d'une expression simple; on peut s'en assurer dans des cas particuliers.

# CHAPITRE II.

## Sur certaines surfaces algébriques engendrées par des systèmes de coniques.

**15.** Si l'on prend le système le plus général de $\infty^1$ coniques, ces courbes engendrent une surface S et leurs plans enveloppent une développable $\Gamma$; la surface S est évidemment déterminée par la développable $\Gamma$ et par cinq directrices dont chacune contiendra généralement un point de chaque génératrice. On sait aussi que la développable tangente à deux coniques génératrices infiniment voisines tend vers la développable circonscrite à la surface S le long d'une de ces coniques.

Tel est le point de départ d'un mémoire important de M. Ed. Weyr (*). Les développements qui vont suivre n'auront guère que cette origine commune avec le travail cité; nous prendrons immédiatement un autre chemin.

Soit $\alpha\beta$ l'intersection de deux plans $\alpha$ et $\beta$ infiniment voisins tangents à $\Gamma$. ou soit $\alpha\beta$ la génératrice de contact du plan $\alpha$ contenant une des coniques $c_2$ qui décrivent S. Imaginons une surface S′ engendrée par une conique dont le plan tourne autour de $\alpha\beta$ comme axe fixe et qui admet le même système de directrices que la surface S Il est clair que S′ aura, le long de $c_2$, la même développable circonscrite que S. Donc certaines constructions relatives à la surface S se déduisent de constructions analogues relatives à la surface S′.

D'un autre côté l'ordre de la surface S dépend de l'ordre de S′. En effet, adjoignons, au système $c$ des directrices de S une droite $g$ indépendante, c'est-à-dire une droite n'ayant, avec les lignes de $c$, aucune relation spéciale, telle que point commun, etc. Les plans des coniques

---

(*) Ed. Weyr, *Zur Theorie der Flächen, welche eine Schar von Kegelschnitten enthalten* (Monatshefte f. Math. u. Phys., t. II).

qui reposent, par six points, sur le système $c+g$ enveloppent une surface U de classe $\mu$ par exemple. Si $\nu$ est la classe de la développable $\Gamma$, il existe, en général, $\mu\nu$ plans tangents communs à U et $\Gamma$, donc $\mu\nu$ coniques reposant, par six points, sur $c+g$ et dont le plan touche $\Gamma$. Par suite, les coniques dont le plan touche $\Gamma$ et qui reposent, par cinq points, sur $c$, engendrent une surface rencontrée $\mu\nu$ fois par une droite quelconque; l'ordre de cette surface est donc $\mu\nu$. Si la développable $\Gamma$ est remplacée par un axe fixe, la surface S d'ordre $\mu\nu$ est remplacée par une surface S′ d'ordre $\mu$.

**16**. Les considérations qui précèdent nous amènent à donner une attention spéciale aux surfaces S′ et à leur accorder la priorité. Dans le présent chapitre, nous nous bornons même à l'étude de cette famille de surfaces. Lorsque l'ordre total des directrices est précisément égal à cinq, chaque directrice de degré $m$ est coupée $m$ fois par une conique génératrice $c_2$. Soit $n$ l'ordre de la surface engendrée. Tout plan mené par l'axe $\alpha\beta$ contient une seule conique $c_2$ et l'axe $\alpha\beta$ est donc une droite multiple dont le degré de multiplicité est $n-2$.

Prenons l'axe pour arête $x_1=x_2=0$ du tétraèdre de référence et désignons par $\varphi_i$ une fonction quelconque, entière et homogène en $x_1$, $x_2$ et du degré $i$. L'équation de la surface sera de la forme

$$\varphi_n+2x_3\varphi_{n-1}+2x_4\varphi'_{n-1}+x_3^2\varphi_{n-2}+2x_3x_4\varphi'_{n-2}+x_4^2\varphi''_{n-2}=0.$$

Coupons par un plan $x_1=\lambda x_2$ et représentons par $\psi_i$ la fonction $\varphi_i$ où $x_1$ et $x_2$ sont remplacés par $\lambda$ et 1. Nous aurons

$$x_2^{n-2}(x_2^2\psi_n+2x_2x_3\psi_{n-1}+2x_2x_4\psi'_{n-1}+x_3^2\psi_{n-2}+2x_3x_4\psi'_{n-2}+x_4^2\psi''_{n-2})=0.$$

La conique située dans le plan $x_1=\lambda x_2$ dégénère en deux droites pour les valeurs de $\lambda$ qui satisfont à l'équation

$$\begin{vmatrix} \psi_n & \psi_{n-1} & \psi'_{n-1} \\ \psi_{n-1} & \psi_{n-2} & \psi'_{n-2} \\ \psi'_{n-1} & \psi'_{n-2} & \psi''_{n-2} \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation est du degré $3n-4$ en $\lambda$.

Donc, *si une surface d'ordre n est engendrée par des coniques dont le plan passe par un axe fixe, il y a, en général,* $3n-4$ *de ces coniques qui dégénèrent en deux droites.*

Si toutes les coniques du système passent par deux points fixes O et O′

de l'axe, on choisira ces points comme sommets du tétraèdre de référence et l'on aura $\psi_{n-2} \equiv 0$ et $\psi'_{n-2} \equiv 0$.

Il y a $n-2$ valeurs de $\lambda$ qui annulent $\psi'_{n-2}$ et, pour ces valeurs, la conique dégénère en deux droites dont l'une coïncide avec OO'. Ou bien, il y a $n-2$ nappes de la surface qui sont tangentes à un même plan tout le long de OO'. Ces $n-2$ valeurs de $\lambda$ sont comprises parmi les $3n-4$ solutions de l'équation précédente; par suite, il y a encore $2n-2$ autres coniques dégénérant en deux droites dont l'une passe par O et l'autre par O'.

Nous avons emprunté cette remarque à un mémoire de M. Blutel(*).

Si donc, dans les cas particuliers, nous découvrons $3n-4$ coniques dégénérant en deux droites différentes de l'axe, nous pourrons affirmer qu'il n'y a point de nappe de la surface tangente à un même plan tout le long de l'axe $\alpha\beta$.

**17.** Supposons maintenant une surface engendrée par une conique dont le plan tourne encore autour d'un axe, mais qui rencontre, chacune en un seul point, cinq directrices curvilignes d'ordres respectifs $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$. Soit $g$ une droite quelconque de l'espace; appelons $\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ l'ordre de la surface considérée et $\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 1)$ l'ordre d'une surface analogue, où la directrice $n_5$ est remplacée par la droite $g$. Cette dernière surface rencontre, en général, la courbe $n_5$ en $n_5 \times \delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 1)$ points et ce même nombre exprime combien de génératrices de la première surface rencontrent $g$; on a donc

$$\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = n_5 \times \delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 1).$$

On procède de même de proche en proche et l'on a finalement

$$\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = n_1 n_2 n_3 n_4 n_5\, \delta(1, 1, 1, 1, 1).$$

Or, d'après le n° 13, $\delta(1, 1, 1, 1, 1) = 8$.

D'autre part, on voit, par des considérations d'infiniment petits, que la développable circonscrite à la surface à directrices curvilignes, le long d'une conique $c_2$ qui passe par les points A, B, C, D, E de ces directrices, se confond avec la développable circonscrite, le long de cette même conique, à une autre surface qui aurait pour directrices les tangentes, en A, B, C, D, E, aux directrices courbes.

---

(*) *Ann. de l'École Normale* (3), VII.

Ainsi, *la surface à cinq directrices curvilignes rencontrées une fois par chaque conique génératrice dépend de la surface à cinq directrices rectilignes, en ce qui concerne certaines propriétés et notamment l'ordre.*

**18.** Par tout ce qui précède, nous sommes conduit à choisir, pour l'étude plus approfondie, la surface engendrée par des coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$ et qui s'appuient sur cinq directrices rectilignes.

Cette figure nous a été signalée par M. J. Neuberg. Par une coïncidence heureuse, c'est aussi, dans l'ordre d'idées que nous exposons ici, la surface la plus générale dont nous ayons pu établir l'équation.

Puisque nous savons qu'elle est du huitième ordre, nous la désignerons par $S_8$. Nous savons aussi qu'elle admet pour droite sextuple l'axe $\alpha\beta$ que nous supposons déterminé par l'intersection de deux plans $\alpha_x = 0$, $\beta_x = 0$. Elle contient les cinq directrices $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$, $\gamma''\delta''$, $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$, chacune déterminée de même par deux plans; nous désignons par C, C′, C″, E, E′ les points où ces directrices sont rencontrées par une conique génératrice $c_2$. Par hypothèse, les directrices et l'axe sont des droites indépendantes, c'est-à-dire que deux d'entre elles ne se coupent pas, que quatre d'entre elles ne sont pas des rayons d'un même système réglé, etc.

La surface $S_8$ contient les dix couples de droites $i$, réelles ou imaginaires conjuguées, rencontrant à la fois l'axe $\alpha\beta$ et trois des directrices, car ces droites $i$ appartiennent à des coniques $c_2$ dégénérées; $S_8$ contient aussi vingt droites $j$ s'appuyant chacune sur $\alpha\beta$, sur une droite $i$ et sur les deux directrices qui ne rencontrent pas $i$, car les droites $j$ complètent les coniques dégénérées dont font partie les droites $i$. Le nombre de vingt coniques dégénérées concorde avec le résultat du n° 16 et il n'y a pas de nappe de $S_8$ tangente à un même plan tout le long de $\alpha\beta$.

*La surface $S_8$ possède, outre l'axe et les directrices, quarante lignes droites.*

**19.** Pour rendre l'étude actuelle indépendante du Chapitre I, supposons que l'on ne connaisse pas l'ordre de la surface $S_8$. On pourrait néanmoins reconnaître directement que cette surface est unicursale. Car, par un de ses points, M, on peut mener une droite unique, $h$, rencontrant à la fois $\alpha\beta$ et une directrice $\gamma\delta$ choisie à volonté; $h$ perce un plan $\pi$ en un point P, image de M. Réciproquement, la droite menée de

P et s'appuyant sur $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ ne rencontre plus $S_8$ qu'en un seul autre point M.

Ainsi, *la surface* $S_8$ *est représentable sur un plan ou unicursale.*

**20.** D'après celà, les coordonnées d'un point M de $S_8$ doivent pouvoir s'exprimer en fonctions rationnelles de deux paramètres.

Le choix de ces paramètres est aisé : le premier sera la quantité $\omega$ telle que

$$\alpha_x + \omega\beta_x = 0$$

représente le plan ($\alpha\beta$, M); le second sera le rapport anharmonique du point M et des points C, C', C'' où la conique $c_2$ passant par M coupe trois des directrices choisies à volonté et rangées dans un ordre arbitraire mais fixe.

Ce rapport anharmonique $\lambda$ est aussi celui des plans qui projettent C, C', C'', M des deux axes $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$, puisque les traces de ces axes sur le plan de $c_2$ appartiennent aussi à $c_2$. Représentons les plans ci-après par les équations écrites en regard

$$\begin{array}{ll|ll}
(\varepsilon\varphi, \mathrm{C}), & \varepsilon_x + k_1\varphi_x = 0, & (\varepsilon'\varphi', \mathrm{C}), & \varepsilon'_x + l_1\varphi'_x = 0, \\
(\varepsilon\varphi, \mathrm{C}'), & \varepsilon_x + k_2\varphi_x = 0, & (\varepsilon'\varphi', \mathrm{C}'), & \varepsilon'_x + l_2\varphi'_x = 0, \\
(\varepsilon\varphi, \mathrm{C}''), & \varepsilon_x + k_5\varphi_x = 0, & (\varepsilon'\varphi', \mathrm{C}''), & \varepsilon'_x + l_5\varphi'_x = 0, \\
(\varepsilon\varphi, \mathrm{M}), & \varepsilon_x + k\varphi_x = 0, & (\varepsilon'\varphi', \mu), & \varepsilon'_x + l\varphi'_x = 0.
\end{array}$$

On doit donc avoir

$$(1) \qquad \frac{k_1 - k_5}{k_2 - k_5} \times \frac{k_2 - k}{k_1 - k} = \frac{l_1 - l_5}{l_2 - l_5} \times \frac{l_2 - l}{l_1 - l} = \lambda.$$

Calculons $k_1$ : les plans ($\varepsilon\varphi$, C), $\gamma_x$, $\delta_x$ et le plan ($\alpha\beta$, M) représenté par $\alpha_x + \omega\beta_x = 0$ se coupent en un même point; donc on a

$$\left| \varepsilon_i + k_1\varphi_i \quad \gamma_i \quad \delta_i \quad \alpha_i + \omega\beta_i \right| = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ou encore

$$(2) \qquad (\varepsilon\gamma\delta\alpha) + k_1(\varphi\gamma\delta\alpha) + \omega(\varepsilon\gamma\delta\beta) + k_1\omega(\varphi\gamma\delta\beta) = 0.$$

On trouve, d'une manière analogue, des équations donnant $k_2, k_5, l_1, l_2, l_5$ en fonctions de $\omega$.

Substituant, dans (1), ces fonctions à $k_1, k_2, k_5, l_1, l_2, l_5$, et y remplaçant $k$ par $\frac{-\varepsilon_x}{\varphi_x}$, $l$ par $\frac{-\varepsilon_x}{\varphi'_x}$, on a deux relations linéaires en $x$,

linéaires en $\lambda$, cubiques en $\omega$; à ces relations on joindra l'équation

$$\alpha_x + \omega\beta_x = 0.$$

On aura ainsi trois égalités qui permettront de trouver les variables $x_1, x_2, x_3, x_4$, proportionnelles à des fonctions entières et du septième degré en $\omega$, du second degré en $\lambda$. Si, entre ces égalités, on élimine $\lambda$ et $\omega$, on a l'équation de la surface $S_8$. Si l'on y regarde $\lambda$ comme constante, elles représentent une courbe gauche unicursale, du septième ordre, $c_7$.

Un plan mené par $\alpha\beta$ ne coupe $c_7$ qu'en un seul point non situé sur $\alpha\beta$; donc cet axe est une sécante sextuple de $c_7$. Comme on peut combiner, de dix manières, les cinq directrices trois à trois et comme on peut faire varier $\lambda$, la surface $S_8$ contient dix systèmes de $\infty^1$ courbes $c_7$; quelques unes de ces lignes peuvent remplacer, comme directrices de la surface, le même nombre de directrices rectilignes données.

Nous avons donc démontré ce théorème :

*Le lieu d'un point* M *de* $S_8$ *qui forme un rapport anharmonique constant avec les points d'appui de* $c_2$ *sur trois directrices est une courbe rationnelle du septième ordre ayant l'axe* $\alpha\beta$ *pour sécante sextuple.*

**21**. D'après ce qu'on vient de voir, l'équation de la surface $S_8$ résulte de l'élimination des $k$, des $l$, de $\lambda$ et de $\omega$ entre les relations (1), les égalités $\varepsilon_x + k\varphi_x = 0$, $\varepsilon'_x + l\varphi'_x = 0$, celles qui donnent $k_1, k_2, k_5, l_1, l_2, l_5$, en fonction de $\omega$ et enfin $\alpha_x + \omega\beta_x = 0$.

$\lambda$ est éliminé si l'on réduit le système (1) à l'équation

$$(3) \qquad \frac{k_1 - k_5}{k_2 - k_5} \times \frac{k_2 - k}{k_1 - k} = \frac{l_1 - l_5}{l_2 - l_5} \times \frac{l_2 - l}{l_1 - l}.$$

On y remplace d'abord $k$ par $-\frac{\varepsilon_x}{\varphi_x}$, $l$ par $-\frac{\varepsilon'_x}{\varphi'_x}$; puis, pour éliminer $\omega$, on le remplacera par $-\frac{\alpha_x}{\beta_x}$ dans l'équation (2) et les cinq analogues, ce qui donnera $k_1$ sous forme d'un rapport de deux fonctions linéaires et homogènes en $\alpha_x$, $\beta_x$, soit

$$k_1 = \frac{f_1(\alpha_x, \beta_x)}{F_1(\alpha_x, \beta_x)}.$$

On trouvera de même

$$k_2 = \frac{f_2}{F_2}, \quad k_5 = \frac{f_5}{F_5}.$$

En portant ces valeurs dans le premier membre de l'équation (3), on trouve.

$$\frac{f_1F_5 - f_5F_1}{f_2F_5 - f_5F_2} \times \frac{f_2\varphi_x + F_2\varepsilon_x}{f_1\varphi_x + F_1\varepsilon_x};$$

le second membre ne diffère du premier que par la substitution des symboles $\varepsilon'$, $\varphi'$ à $\varepsilon$, $\varphi$ (ces derniers sont implicitement dans les $f$ et F).

Les points dont les coordonnées annulent $f_1F_5 - f_5F_1$ sont situés dans deux plans $\chi$ passant par $\alpha\beta$, car la fonction $f_1F_5 - f_5F_1$ est quadratique et homogène en $\alpha_x$ et $\beta_x$; de plus, pour tout point M situé dans un de ces plans $\chi$, $k_1$ $\left(\text{ou } \frac{f_1}{F_1}\right)$ est égal à $k_5$ $\left(\text{ou } \frac{f_5}{F_5}\right)$ et les plans ($\varepsilon\varphi$, C) et ($\varepsilon\varphi$, C'') coïncident, c'est-à-dire que chaque plan $\chi$ coupe $\gamma\delta$, $\gamma''\delta''$ et $\varepsilon\varphi$ en trois points alignés. En d'autres termes encore, les quatre droites $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\gamma''\delta''$, $\varepsilon\varphi$ sont rencontrées par deux droites $i$ réelles ou imaginaires conjuguées; les plans $\chi$ sont les plans ($\alpha\beta$, $i$).

Pareillement, $f_2F_5 - f_5F_2 = 0$ représente deux plans par $\alpha\beta$ qui coupent $\gamma'\delta'$, $\gamma''\delta''$, $\varepsilon\varphi$ en trois points alignés.

Pour tout point M dont les coordonnées annulent $f_2\varphi_x + F_2\varepsilon_x$, $k_2$ est égal à $k$, c'est-à-dire que les plans ($\varepsilon\varphi$, C') et ($\varepsilon\varphi$, M) coïncident ou qu'il existe une droite issue de M et s'appuyant sur $\alpha\beta$, $\gamma'\delta'$, $\varepsilon\varphi$; le lieu de ces points est l'hyperboloïde passant par $\alpha\beta$, $\gamma'\delta'$, $\varepsilon\varphi$.

Pareillement, $f_1\varphi_x + F_1\varepsilon_x = 0$ représente l'hyperboloïde déterminé par $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\varphi$.

Le second membre de l'équation de $S_8$ aura une interprétation analogue, sauf substitution de $\varepsilon'\varphi'$ à $\varepsilon\varphi$.

Il convient de condenser encore les notations : numérotons 1, 2, 3, 4, 5 les directrices $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$, $\gamma''\delta''$, $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$.

Désignons par $(\alpha\beta)(h, h', h'')$ l'ensemble des deux plans qui contiennent $\alpha\beta$ et qui coupent, en des points alignés, les directrices numérotées $h$, $h'$, $h''$ et soit $(\alpha\beta)(h, h', h'') = 0$ l'équation de ce couple de plans. Appelons $(\alpha\beta, h, h')$ l'hyperboloïde ayant pour génératrices d'un même système l'axe $\alpha\beta$ et les directrices numérotées $h$ et $h'$, et soit $(\alpha\beta, h, h') = 0$ l'équation de cet hyperboloïde.

Le premier membre des équations que nous venons de définir peut-être affecté d'un facteur numérique arbitraire; l'équation de la surface $S_8$ aura donc la forme

$$(4)\quad \frac{T_8}{U_8} = \frac{[(\alpha\beta)(1, 3, 4)]\,[(\alpha\beta)(2, 3, 5)]\,(\alpha\beta, 2, 4)\,(\alpha\beta, 1, 5)}{[(\alpha\beta)(2, 3. 4)]\,[(\alpha\beta)(1, 3, 5)]\,(\alpha\beta, 1, 4)\,(\alpha\beta, 2, 5)} = \text{constante}.$$

**22.** Chacune des surfaces $T_s$ et $U_s$ se décompose en deux couples de plans et deux quadriques; la directrice 3 est la seule qui n'appartienne à aucune de ces surfaces partielles; le fait qu'elle se trouve sur $S_s$ peut servir à déterminer la constante du second membre; il suffit, en effet, de remplacer, dans le premier membre, les coordonnées courantes par les coordonnées d'un point de 3.

On sait que les coordonnées homogènes $x_i$ d'un point peuvent être regardées comme des fonctions linéaires $\xi_i$ des coordonnées cartésiennes multipliées par un facteur $\rho$ qui peut varier d'un point à l'autre, tandis que les coefficients des fonctions $\xi$ sont les mêmes pour tous les points. Seulement le coefficient $\rho$ n'affecte pas la fraction $\frac{T_s}{U_s}$ dont les termes sont homogènes et du même degré. On peut donc imaginer que l'on opère dans un système de coordonnées cartésiennes, et la valeur que prend $\frac{T_s}{U_s}$ quand on y remplace les variables par les coordonnées d'un point M est le rapport des puissances $P_t$, $P_u$ de ce point relativement aux deux systèmes $T_s$, $U_s$, ces puissances étant comptées dans une direction donnée $\Delta$ et multipliées par des constantes $c_t$, $c_u$ qui dépendent des coefficients des formes $T_s$, $U_s$, $\xi_i$ et de la direction $\Delta$, mais non du point choisi M.

*On isole une directrice quelconque* 3, *on répartit les autres, de deux manières, en deux couples tels que* 1, 4; 2, 5 et 2, 4; 1, 5. *On considère : d'une part, les quatre plans qui projettent, de* $\alpha\beta$, *les droites s'appuyant sur* 3 *et sur chacun des deux premiers couples; plus les deux hyperboloïdes ayant pour génératrices d'un même système* $\alpha\beta$ *et chacun des deux derniers couples; — d'autre part, quatre plans et deux hyperboloïdes analogues aux précédents et obtenus en intervertissant les couples* 1, 4; 2, 5 *avec* 2, 4; 1, 5. *Le rapport des puissances, dans une direction* $\Delta$, *d'un point quelconque de la droite* 3 *relativement aux deux systèmes ci-dessus définis est une constante* $\mu$. *La surface* $S_s$ *est le lieu des points dont les puissances, dans la même direction, relativement aux mêmes systèmes, est la même constante* $\mu$.

**23.** Il est naturel de prendre, pour la direction $\Delta$, la droite 3 elle-même; or, les points où elle perce les plans $(\alpha\beta)$ (1, 3, 4) sont les mêmes que ceux où elle rencontre l'hyperboloïde $(\alpha\beta, 1, 4)$ et de même pour les

autres couples de plans et hyperboloïdes; par suite, pour un point de 3, on a $P_t = P_u$ et, dans l'équation (4), la constante du second membre est $c_t : c_u$. Donc, pour tout point M de $S_8$, on a $P_t = P_u$, ce qu'on peut énoncer de la manière suivante.

*Si par un point* M *on mène une droite* 6 *parallèle à* 3; *si cette droite coupe, en* $P_1, P_2, \ldots, P_8$, *les quatre couples de plans* $(\alpha\beta)(1, 3, 4)$, $(\alpha\beta)(2, 3, 5)$, $(\alpha\beta)(2, 6, 4)$, $(\alpha\beta)(1, 6, 5)$, *et en* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_8$, *les plans* $(\alpha\beta)(2, 3, 4)$, $(\alpha\beta)(1, 3, 5)$, $(\alpha\beta)(1, 6, 4)$, $(\alpha\beta)(2, 6, 5)$, *l'égalité*

$$MP_1 \,.\, MP_2 \ldots MP_8 = MQ_1 \,.\, MQ_2 \ldots MQ_8$$

*caractérise les points de la surface* $S_8$.

Quant au rôle spécial de la directrice 3, il provient du choix des directrices 4 et 5 comme axes de faisceaux et de la forme donnée au rapport anharmonique $\lambda$; ces choix sont arbitraires et chaque directrice peut être amenée à jouer le rôle spécial de 3.

**24.** L'équation (4) montre évidemment que la surface $S_8$ est du huitième ordre et admet $\alpha\beta$ comme droite sextuple.

Cette équation peut s'écrire

$$T_8 - \mu U_8 = 0.$$

Donc $S_8$ appartient à un faisceau dont font partie les systèmes $T_8$ et $U_8$; le plan tangent en un point M de $S_8$ passe donc par l'intersection des plans polaires de M relatifs à $T_8$ et $U_8$ et la construction de ces plans polaires se ramène à une série de problèmes du premier et du second degré.

Les éléments de la courbure de $S_8$ en un point M dépendent des mêmes éléments de la quadrique polaire du point M relativement à la surface(*). Mais les quadriques polaires d'un point par rapport aux surfaces d'un faisceau forment aussi un faisceau et la quadrique polaire d'un point d'une surface passe par ce point; donc la quadrique polaire de M relative à $S_8$ est déterminée par M et par l'intersection $c_4$ de ses quadriques polaires relatives aux systèmes $T_8$ et $U_8$(**).

(*) La propriété analogue pour les cubiques planes a été donnée par M. Demoulin, *Sur diverses conséquences du théorème de Newton* (Mém. Acad. roy. de Belgique, t. XLV). Pour le théorème général relatif aux courbes et surfaces, voir Servais, *Sur la courbure des polaires* (Bullet. id., 1891), Stuyvaert, *Sur la courbure des lignes et des surfaces* (Mém. id., 1897).

(**) Comparer Stuyvaert, *Problèmes de construction* (*Mathesis*, 1899).

Donc, *les éléments de la courbure de* $S_8$ *dépendent d'une intersection de quadriques.*

Les tangentes inflexionnelles de $S_8$ en M sont les génératrices rectilignes de sa quadrique polaire, donc aussi les bisécantes de $c_4$ issues de M.

**25.** On a vu, au début de ce chapitre, une construction géométrique donnant une représentation de $S_8$ sur un plan. Dans la suite on a calculé les coordonnées d'un point de $S_8$ en fonction de deux paramètres $\omega$ et $\lambda$, ce qui fournit encore une représentation, mais différente de la première. Nous reprenons à présent cette seconde représentation.

La correspondance entre les $x$ et $\lambda$, $\omega$ se présentait sous la forme de trois relations linéaires en $x$; les deux premières étaient linéaires en $\lambda$ et cubiques en $\omega$, la troisième ($\alpha_x + \omega\beta_x = 0$) était linéaire en $\omega$ et indépendante de $\lambda$. Nous avons dit que l'on pouvait en tirer des valeurs des $x$ proportionnelles à des fonctions du neuvième ordre, contenant $\lambda$ au carré et $\omega$ à la septième puissance, ce que nous indiquons par la notation conventionnelle

$$\rho x_i = f_i(\omega^7, \lambda^2).$$

Pour rendre ces fonctions homogènes, on peut poser par exemple

$$\omega = \frac{\mu_1}{\mu_5}, \quad \lambda = \frac{\mu_2}{\mu_5}$$

et les fonctions $f$ seront du neuvième ordre, tout en ne renfermant $\mu_2$ qu'à la seconde puissance et $\mu_1$ qu'à la septième. Si $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_5$ sont les coordonnées homogènes d'un point d'un plan $\pi$, les courbes *fondamentales* $\Sigma h_i f_i$, c'est à-dire les courbes images des sections planes de $S_8$, ont un point septuple commun au sommet $\mu_1 = \mu_5 = 0$ du triangle de référence et un point double au sommet $\mu_2 = \mu_5 = 0$.

Le point septuple correspond à la directrice 1 ou $\gamma\delta$, car $\mu_1 = \mu_5 = 0$ rend $\lambda$ infini et $\omega$ indéterminé; or, si $\lambda$ est infini, les égalités (1) montrent que $k = k_1$ et $l = l_1$ et que le point M coïncide avec C. Le point double correspond à la conique génératrice du plan $\beta_x$, car, pour $\mu_2 = \mu_5 = 0$, $\lambda$ est indéterminé et $\omega$ ou $-\alpha_x : \beta_x$ infini.

Aux droites du plan $\pi$ passant par le point septuple correspondent les coniques génératrices, sauf pour la droite $\mu_5 = 0$ qui répond au seul point où $\gamma\delta$ perce le plan $\beta_x$. Aux droites du plan $\pi$ passant par le point double répondent, en général, les courbes $c_7$, lieux des points M

correspondant à une même valeur de $\lambda$; il y a exception pour la droite $\mu_5 = 0$ déjà citée et pour les droites $\mu_2 = 0$ et $\mu_2 = \mu_5$ qui correspondent aux valeurs 0 et 1 du rapport anharmonique $\lambda$ et, par suite, aux directrices $\gamma'\delta'$ et $\gamma''\delta''$ de $S_8$.

En général, quand, sur le plan $\pi$, les courbes fondamentales sont du neuvième ordre; la surface représentée est du 81e; mais l'existence du point septuple et du point double communs, comptant pour $49 + 4 = 53$ intersections, réduit ce degré à 28; or, nous savons que la surface représentée est du huitième ordre; donc les courbes fondamentales ont encore vingt points R communs, répondant à vingt droites de $S_8$; de plus, les droites joignant ces points R au point septuple répondent à vingt autres droites de $S_8$; les quarante droites ainsi trouvées constituent les vingt coniques dégénérées $(i + j)$ dont il a déjà été parlé.

Si les courbes fondamentales $f$ n'ont pas, en général, d'autres points singuliers que leurs points double et septuple, le genre de ces courbes est

$$28 - 21 - 1 = 6,$$

puisque le point septuple compte pour 21 points doubles. Les sections planes de $S_8$ sont du même genre et, en effet, si $S_8$ n'a pas d'autre ligne multiple que l'axe $\alpha\beta$, les sections planes du huitième ordre n'ont qu'un point sextuple sur $\alpha\beta$ et leur genre est

$$21 - 15 = 6.$$

Mais il est évident, d'après la génération de $S_8$, que cette surface n'a pas d'autre ligne singulière que $\alpha\beta$, sinon les coniques génératrices auraient toutes un point singulier sur cette ligne; or, il n'y a que vingt coniques génératrices à point double.

**26.** Par quoi sera représentée, sur le plan $\pi$, la droite $\alpha\beta$ sextuple sur $S_8$?

Appelons $A_2$ le point double, $B_7$ le point septuple des courbes $f$ sur le plan $\pi$. Une conique génératrice répondant à la valeur $\omega_1$ de $\omega$ contient deux points $P_1$ et $P_2$ de $\alpha\beta$, pour lesquels $\lambda$ prend des valeurs $\lambda_1$, $\lambda_2$; les points $p_1$, $p_2$, images de $P_1$, $P_2$ sont à l'intersection d'une droite $B_7p_1p_2$ ayant pour équation $\mu_1 = \omega_1\mu_3$ avec deux droites $A_2p_1$, $A_2p_2$ ayant pour équations $\mu_2 = \lambda_1\mu_5$ et $\mu_2 = \lambda_2\mu_5$. Les deux faisceaux $(B_7)$, $(A_2)$ sont tels qu'à un rayon du premier répondent deux rayons du second, et ils engendrent une courbe, image de $\alpha\beta$; mais un rayon $A_2p$ de $(A_2)$ repré-

sente une courbe $c_7$ de la surface et celle-ci a six points sur $\alpha\beta$, c'est-à-dire qu'un rayon du faisceau $(A_2)$ répond à six rayons du faisceau $(B_7)$; ces deux faisceaux engendrent donc une courbe du huitième degré $\Gamma_8$. Elle passe évidemment par les vingt points fondamentaux simples R, puisque ceux-ci représentent des droites qui rencontrent $\alpha\beta$.

*L'axe $\alpha\beta$ a pour image, sur le plan $\pi$, une courbe du huitième ordre ayant un point double en $A_2$, un point sextuple en $B_7$ et passant par les vingt points* R.

Comme vérification, remarquons qu'une courbe du 8e ordre de $\pi$ représente, en général, sur $S_8$, une courbe d'ordre $8 \times 9$; mais comme $\Gamma_8$ passe six fois par le point septuple, deux fois par le point double et une fois par 20 points simples, il y a, de ce chef, une réduction totale de $6 \times 7 + 2 \times 2 + 20 = 66$ et la courbe représentée est du degré $72 - 66 = 6$, ce qui correspond à l'ordre de multiplicité de $\alpha\beta$.

**27.** De même, quelle est l'image des directrices 4 et 5 ?

Les points fondamentaux R représentent des droites de $S_8$ dont tous les points correspondent à la même valeur du rapport anharmonique $\lambda$, ce qui peut arriver, 1° pour les trois couples de droites $i$ et le couple de droites $j$ rencontrant 4 et 5, 2° pour les trois couples de droites $j$ rencontrant 4 et les trois couples de droites $j$ rencontrant 5. Les directrices 4 et 5 jouent des rôles identiques dans toute la théorie; leurs courbes images sont donc du même degré $x$. Ces courbes admettent, pour points communs simples, le point $A_2$ (car la conique représentée par $A_2$ rencontre 4 et 5) et les huit points R représentant des droites $i$ et $j$ qui rencontrent à la fois 4 et 5. Chacune passe encore par six autres points R, et rencontre une seule fois un rayon mené par $B_7$ et représentant une conique génératrice, de sorte que $B_7$ est un point $(x-1)^{ple}$ pour ces deux courbes. Enfin, comme 4 et 5 ne se rencontrent pas, leurs courbes images ne peuvent se couper qu'en des points fondamentaux, donc on a

$$(x-1)^2 + 9 = x^2,$$

d'où $x = 5$.

*Chacune des directrices* 4 *et* 5 *est représentée, sur le plan $\pi$, par une courbe $\Gamma_5$ du cinquième ordre, ayant $B_7$ pour point quadruple, $A_2$ pour point simple et passant par* 14 *points* R.

**28.** Pour vérifier le résultat précédent, cherchons l'ordre de la courbe représentée par $\Gamma_5$; les courbes fondamentales étant du 9e degré,

une courbe du 5e ordre représente, en général, une ligne du 45e ordre; mais $\Gamma_5$ ayant un point quadruple au point septuple des courbes $f$, un point simple au point double des $f$ et passant encore une fois par 14 points R, il y a, de ce chef, une réduction totale de $4 \times 7 + 2 \times 1 + 14 = 44$ unités et $\Gamma_5$ représente une ligne d'ordre $45 - 44 = 1$.

Voici une autre vérification : la directrice 4 ne rencontrant pas $\alpha\beta$, les courbes $\Gamma_5$ et $\Gamma_8$ ne peuvent se couper qu'en des points fondamentaux, et l'on a effectivement

$$5 \times 8 = 6 \times 4 + 2 \times 1 + 14.$$

La connaissance des courbes $\Gamma_5$ images des directrices 4 et 5 nous fournit une conséquence curieuse.

Un rayon par $A_2$ coupe, en général, en quatre points (non fondamentaux), la courbe $\Gamma_5$. Donc toutes les courbes $c_7$ de la surface $S_8$ admettent les directrices 4 et 5 comme quadrisécantes.

Par suite, il y a quatre coniques dont le plan passe par $\alpha\beta$ et qui reposent sur les directrices 1, 2, 3, 4, 5, de telle façon que le rapport anharmonique de leurs points d'appui sur 1, 2, 3, 4 soit égal à un nombre donné. Or, si l'on regarde 5 comme une droite quelconque de l'espace, on a donc ce théorème :

*Les coniques dont le plan passe par $\alpha\beta$ et qui rencontrent quatre directrices rectilignes en des points dont le rapport anharmonique est donné engendrent une surface du quatrième ordre ayant $\alpha\beta$ comme droite double* (*).

**29.** Par le point sextuple d'une section plane de $S_8$, on peut mener, en général, 14 tangentes $t$ à cette courbe, ayant leur contact D ailleurs qu'au point singulier; le plan mené par $t$ et $\alpha\beta$ contient une conique génératrice $c_2$ ayant deux points coïncidents en D, donc tangente au plan $\xi$ de la section considérée, à moins que D ne soit un point double de $c_2$. Réciproquement, si $c_2$ touche $\xi$ en D, sa tangente $t$ en D rencontre la section plane de $S_8$ par $\xi$ en deux points coïncidents en D; donc $t$ est tangente à cette section plane.

Ainsi, *tout plan qui ne passe pas par un des vingt points* (ij) *est tangent à quatorze coniques génératrices.*

---

(*) Ceci est un commencement de solution d'une question que nous a posée M. Servais.

En particulier, *si aucune droite* i *n'est parallèle à la droite* j *correspondante, il y a quatorze paraboles parmi les coniques génératrices de* $S_8$.

Il en résulte aussi que les tangentes à $S_8$ issues d'un point P de $\alpha\beta$ forment un cône du 14e ordre, puisque tout plan mené par P contient quatorze de ces tangentes ; la droite $\alpha\beta$ est multiple d'ordre 12 sur ce cône, puisque tout plan mené par $\alpha\beta$ ne contient, outre $\alpha\beta$, que deux tangentes de P à $S_8$.

On peut conjecturer par là qu'il doit y avoir douze coniques génératrices de $S_8$ tangentes à $\alpha\beta$. La conjecture est vérifiée par ce fait que, sur le plan $\pi$, la courbe $\Gamma_8$, image de $\alpha\beta$, qui a un point sextuple en $B_7$ et un point double en $A_2$ a douze tangentes issues de $B_7$ et ces douze tangentes représentent autant de coniques génératrices tangentes à $\alpha\beta$.

Si donc on imagine un système de coniques reposant sur quatre droites 1, 2, 3, 4 et touchant une cinquième droite $\alpha\beta$, on obtient une surface qui est rencontrée douze fois par une droite 5 quelconque; un plan par $\alpha\beta$ coupe cette surface suivant l'axe $\alpha\beta$ et deux coniques génératrices. On a donc ce théorème :

*La surface engendrée par une conique s'appuyant sur quatre droites et en touchant une cinquième est du douzième ordre et admet la cinquième droite comme ligne multiple d'ordre* 8.

**30**. Les nombres caractéristiques trouvés au n° précédent, pour $S_8$, se vérifient encore si l'on applique, à cette surface, la théorie générale des singularités, théorie exposée par SALMON et, pour le cas d'une droite multiple, par ZEUTHEN (*).

Mais, avant d'utiliser les formules de ces auteurs, il faut voir si $S_8$ n'a pas d'autres singularités ponctuelles que sa droite sextuple. Les seuls points pour lesquels il peut y avoir doute sont les points doubles des coniques dégénérées $(i+j)$.

Soit E le point commun à une droite $i$ qui s'appuie sur $\alpha\beta$, 1, 3, 4 et à la droite correspondante $j$ qui passe par les traces de 2 et 5 sur le plan $(\alpha\beta, i)$. Remontons à l'équation (4),

$$\frac{T_8}{U_8} = \frac{[(\alpha\beta)\,(1,3,4)]\,[(\alpha\beta)\,(2,3,5)]\,(\alpha\beta,2,4)\,(\alpha\beta,1.5)}{[(\alpha\beta)\,(2,3,4)]\,[\alpha\beta)\,(1,3,5)]\,(\alpha\beta,1,4)\,(\alpha\beta,2,5)} = \text{constante}.$$

(*) SALMON, *Traité de géométrie analytique à* 3 *dimensions*, IIIe partie. — ZEUTHEN, *Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface* (Math. Ann., t. IV).

Le point E est sur un des plans $[(\alpha\beta)\ (1, 3, 4)]$; mais comme il n'annule, généralement, aucun autre facteur du numérateur, E est un point simple de la surface $T_8$ Or, E se trouve sur les deux hyperboloïdes $(\alpha\beta, 1, 4)$, $(\alpha\beta, 2, 5)$; c'est donc un point double de $U_8$. Si donc E avait pour coordonnées $x_2 = x_5 = x_4 = 0$, le terme en $x_1^8$ manquerait dans $T_8$, mais non le terme en $x_1^7$; au contraire, dans $U_8$, les termes en $x_1^8$ et $x_1^7$ seraient nuls; donc, à moins que la constante du second membre ne soit infinie, ce qui n'a pas lieu en général, les termes en $x_1^7$ ne se détruiraient pas et E est un point simple de $S_8$.

Ainsi la surface $S_8$ a sa droite sextuple comme seule singularité. Or, les formules de SALMON et ZEUTHEN, trop longues à reproduire ici, donnent, pour une surface du huitième ordre à droite sextuple, les résultats suivants :

*La surface est de classe* 52; *une section plane quelconque est de classe* 26 *et a* 240 *tangentes doubles et* 54 *inflexions; un cône circonscrit quelconque est de l'ordre* 26 *et a* 200 *génératrices doubles et* 66 *génératrices cuspidales; un cône ayant son sommet sur* $\alpha\beta$ *se compose de cet axe compté deux fois et d'un cône résidu de l'ordre* 14, *de la classe* 50, *ayant* $\alpha\beta$ *comme arête* 12$^{ple}$; *il y a vingt points sur* $\alpha\beta$ *tels que deux des coniques génératrices qui y passent coïncident, etc.*

**31.** M. WEYR, dans le mémoire cité précédemment, considère la surface la plus générale engendrée par des coniques. Il établit géométriquement que la développable circonscrite à cette surface le long d'une conique génératrice est de classe 4, 3 ou 2, suivant que deux coniques génératrices consécutives ont 0, 1 ou 2 points communs. La fin de son travail contient une démonstration analytique de ce théorème qui constitue une généralisation élégante de la propriété des plans tangents le long d'une génératrice d'une surface réglée. Dans cette démonstration analytique, la conique est représentée par deux équations en coordonnées-points ou par une équation tangentielle à discriminant nul. Le mémoire de M. WEYR contient en outre un grand nombre de propriétés et de constructions intéressantes.

Avant d'avoir lu ce travail, nous avions établi le théorème auquel il vient d'être fait allusion et nous allons consigner ici notre raisonnement, parce qu'il s'applique à toutes les surfaces représentables sur un plan, quand les courbes fondamentales d'orde $n$ ont en commun un point multiple d'ordre $n - 2$ plus un point double.

Nous avons représenté la surface $S_8$ par les équations

$$\rho x_i = f_i(\omega^7, \lambda^2).$$

Un point $x'$, infiniment voisin de $x$ sur la conique génératrice $c_2$ a pour coordonnées

$$\rho' x_i' = f_i[\omega^7, (\lambda + d\lambda)^2] = \rho x_i + d\lambda \frac{df_i}{d\lambda} + \cdots$$

Un point $x''$, infiniment voisin de $x$ sur la courbe $c_7$ a pour coordonnées

$$\rho'' x_i'' = f_i[(\omega + d\omega)^7, \lambda^2] = \rho x_i + d\omega \frac{df_i}{d\omega} + \cdots$$

En faisant abstraction des infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on a des points voisins de $x$ sur les tangentes à $c_2$ et à $c_7$, et le plan de ces trois points, ou le plan tangent en $x$ à $S_8$ a pour équation, les coordonnées courantes étant $X_i$,

$$\begin{vmatrix} X & f & \frac{df}{d\lambda} & \frac{df}{d\omega} \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} X & 2f - \lambda\frac{df}{d\lambda} & \frac{df}{d\lambda} & \frac{df}{d\omega} \end{vmatrix} = 0.$$

Les termes des deuxième, troisième, quatrième colonne de ce déterminant sont respectivement de degré 1, 1 et 2 en $\lambda$. Si l'on regarde $\omega$ comme constant et $\lambda$ comme variable, l'équation du plan tangent en un point mobile M de la conique génératrice $c_2$ est fonction du quatrième degré de $\lambda$ et ce plan enveloppe une développable de quatrième classe.

Par tout point X de l'espace, on peut mener quatre plans tangents à cette développable; ceux-ci contiendront chacun une tangente à $c_2$ et toucheront donc le cône de sommet X et de base $c_2$.

Ainsi *tout cône du second ordre et par suite aussi toute quadrique passant par une conique génératrice de* $S_8$ *touche la surface en quatre points de cette conique.*

Cette propriété est une extension d'un théorème relatif aux surfaces réglées : tout plan mené par une génératrice rectiligne touche la surface en un point.

La démonstration qui précède montre aussi que la développable circonscrite est unicursale. De plus, si dans la dernière équation, on regarde les $X_i$ comme quatre paramètres arbitraires homogènes, on a

l'équation d'une involution $I_3^4$. Il était d'ailleurs évident géométriquement que les groupes de quatre points de $c_2$ dont les plans tangents concourent forment une telle involution, puisque trois points quelconques déterminent un point X commun à leurs plans tangents et, par suite, un quatrième point complétant le groupe. Remarquons enfin que cette involution a quatre groupes de quatre points coïncidents.

**32.** Dans l'étude de la surface $S_8$, nous avons supposé que les directrices et l'axe étaient des droites indépendantes.

Admettons maintenant qu'il n'en soit plus ainsi et voyons d'abord ce qui arrive quand il y a des points communs à deux des directrices. D'après le Chapitre I, chacun de ces points communs réduit, en général, d'une unité, l'ordre de la surface.

Pour le vérifier, rappelons l'équation de $S_8$ :

$$\frac{T_8}{U_8} = \frac{[(\alpha\beta)(1,3,4)][(\alpha\beta)(2,3,5)](\alpha\beta,2,4)(\alpha\beta,1,5)}{[(\alpha\beta)(2,3,4)][(\alpha\beta)(1,3,5)](\alpha\beta,1,4)(\alpha\beta,2,5)} = \text{constante}.$$

Si les directrices 1 et 3 ont un point commun P, le plan $(\alpha\beta, P)$ est à la fois un des plans $(\alpha\beta)(1,3,4)$ et un des plans $(\alpha\beta)(1,3,5)$; les deux termes de la fraction ci-dessus ont donc un facteur linéaire commun et la surface $S_8$ se décompose en un plan $(\alpha\beta, P)$ et une surface du septième ordre. Si les directrices 2 et 4 ont un point commun Q, la quadrique $(\alpha\beta, 2, 4)$ dégénère en deux plans dont l'un est $(\alpha\beta, Q)$ et celui-ci est aussi un des plans $(\alpha\beta)(2,3,4)$, donc il y a encore un facteur $(\alpha\beta, Q)$ commun aux deux termes de la fraction, etc.

Cependant il y a une exception curieuse : si trois directrices 1, 2, 3, sont dans un même plan $\tau$, toutes les coniques génératrices se décomposent en deux droites dont l'une décrit le système réglé $(\alpha\beta, 4, 5)$ et l'autre le plan $\tau$.

Les cas des points communs à deux directrices ne sont pas les seuls à considérer; lorsque quatre directrices 1, 2, 3, 4 sont des rayons d'un même système réglé, les plans $(\alpha\beta)(1,3,4)$ se confondent avec les plans $(\alpha\beta)(1,2,4)$ et l'équation précédente indique, de ce chef, une réduction de deux unités dans l'ordre de la surface; si les cinq directrices sont des rayons d'un même système réglé, il est évident que la surface se confond avec la quadrique support de ce système.

Il se peut aussi que l'axe $\alpha\beta$ ne soit pas indépendant des directrices; nous remettons à plus tard l'examen du cas où cet axe rencontre une

des directrices; mais nous pouvons constater ici que, si l'axe et trois directrices 1, 2, 4 sont des rayons d'un même système réglé, les quadriques $(\alpha\beta, 2, 4)$ et $(\alpha\beta, 1, 4)$ sont identiques, ainsi que les couples de plans $(\alpha\beta)(2, 3, 4)$ et $(\alpha\beta)(1, 3, 4)$, ce qui donne une réduction de quatre unités au moins; et si l'axe est situé, avec les cinq directrices (sans points communs) sur une même surface cubique, la surface $S_8$ se réduit évidemment à cette surface cubique.

**33**. Puisque nous avons rencontré la surface générale du troisième ordre comme cas particulier de la surface $S_8$, nous pouvons esquisser une représentation plane de la surface cubique qui soit une application de la méthode que nous avons exposée(*).

Prenons, sur la surface cubique $\Sigma_3$, six droites sans points communs, $\alpha\beta$, 1, 2, 3, 4, 5. La surface est décrite par la conique reposant sur 1, 2, 3, 4, 5 et dont le plan $\alpha_x + \omega\beta_x = 0$ tourne autour de $\alpha\beta$. Un point M de $\Sigma_3$ est déterminé par le paramètre $\omega$ et le rapport anharmonique $\lambda$ de M et des points d'appui de la conique génératrice sur 1, 2, 3. Posons, comme précédemment,

$$\omega = \frac{\mu_1}{\mu_3}, \quad \lambda = \frac{\mu_2}{\mu_5}.$$

Sur le plan $\pi$, les courbes fondamentales d'ordre $x$ auront un point $(x-2)^{ple}$ en B $(\mu_1 = \mu_3 = 0)$, puisque les droites menées par ce point doivent représenter les coniques génératrices $c_2$. Le point A $(\mu_2 = \mu_5 = 0)$ représente la conique $\beta_x$ et comme celle-ci coupe deux fois toutes les sections planes de $\Sigma_5$, A doit être un point double des courbes fondamentales. Les sections planes sont de genre 1; il doit en être de même des courbes fondamentales; or, celles-ci ont un point double et un point $(x-2)^{ple}$, donc

$$\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2) - \tfrac{1}{2}(x-2)(x-3) - 1 = 1,$$

d'où $x = 4$. Ainsi les courbes fondamentales sont du quatrième degré à deux points doubles; l'ordre de la surface représentée est, $y$ étant le nombre des points fondamentaux simples R,

$$4 \times 4 - 2 \times 2 - 2 \times 2 - y = 3,$$

d'où $y = 5$. Donc il y a cinq coniques $c_2$ dégénérées, ou la droite $\alpha\beta$ est rencontrée par 10 des 27 droites de $\Sigma_3$, ce qui est connu.

(*) Cette idée nous est suggérée par M. Servais.

Les courbes fondamentales peuvent dégénérer, de deux manières, en une cubique et une droite : d'abord, la droite peut passer par B et représenter une conique $c_2$, tandis que la cubique passera par les cinq points R et par B et aura A pour point double; cette cubique représente donc $\alpha\beta$; — ou bien la droite peut passer par A et représenter une conique $\gamma_2$ lieu des points M de même rapport anharmonique sur les coniques $c_2$; la cubique a alors B pour point double, A et les R pour points simples et elle représente une droite de $\Sigma_5$, autre que $\alpha\beta$, 1, 2, 3, 4, 5 et ne rencontrant pas $\alpha\beta$; cette droite est dans le plan de toutes les coniques $\gamma_2$.

Ainsi, *les coniques d'une surface du troisième ordre situées dans un faisceau de plans rencontrent trois droites de la surface en des ternes de points. Le lieu d'un point* M *de ces coniques formant, avec ce terne, un rapport anharmonique constant est une autre conique dont le plan passe par une droite fixe de la surface.*

Nous ne poursuivrons pas ici cette étude qui nous entraînerait hors de notre sujet.

**34.** Nous avons vu que la surface $S_8$ la plus générale comprend quatorze coniques génératrices tangentes à un plan donné $\xi$, pourvu que ce plan ne passe pas par un point double d'une conique génératrice. Donc les coniques dont le plan passe par $\alpha\beta$, qui s'appuient sur quatre droites 1, 2, 3, 4 et qui touchent un plan $\xi$ engendrent une surface $S_{14}$, du 14e ordre (puisqu'elle rencontre, en 14 points, une droite quelconque 5). Tout plan par $\alpha\beta$ contient deux coniques génératrices, de sorte que $\alpha\beta$ est une droite décuple de $S_{14}$. D'après sa définition, cette surface touche le plan $\xi$ en tous les points où elle le rencontre et le lieu des contacts est une courbe du septième ordre à point quintuple sur $\alpha\beta$. Ce fait peut encore être vérifié par d'autres moyens; ainsi, toute droite menée dans le plan $\xi$ et rencontrant $\alpha\beta$ détermine un plan passant par $\alpha\beta$, touche deux coniques génératrices et contient donc deux couples de points coïncidents de $S_{14}$; ou encore, la surface $S_8$ étudiée précédemment touche sur la directrice 5, un plan $\eta$ mené par cette droite, en sept points, car ce plan $\eta$ coupe $S_8$ suivant la droite 5, plus une courbe du septième ordre.

*Les coniques dont le plan passe par un axe, qui s'appuient sur quatre droites et qui touchent un plan engendrent une surface du* 14e *ordre ayant*

*l'axe pour droite décuple et touchant le plan donné le long d'une courbe du septième ordre.*

**35.** Appliquons le théorème du n° 17, au cas de quatre directrices rectilignes 1, 2, 3, 4, plus une conique $g_2$ rencontrée une fois par chaque conique génératrice $c_2$; nous obtenons une surface $S_{16}$ du seizième ordre ayant $\alpha\beta$ pour droite 12ple.

Soit $\eta$ le plan de la conique $g_2$ et O le point où il coupe $\alpha\beta$. Menons, par O, dans le plan $\eta$, une droite quelconque coupant $g_2$ en A et B. Les coniques génératrices déterminées par A et B coupent encore AB, respectivement en A′ et B′ et ces derniers points décrivent, dans le plan $\eta$, une courbe ou un système d'ordre $16 - 2 = 14$, coupant $g_2$ en 28 points. Ceux-ci répondent à des coïncidences de A ou B avec A′ ou B′. Or, les coïncidences de points A et A′ (ou B et B′) appartiennent à des coniques $c_2$ touchant $\eta$; d'après le n° précédent, ces courbes marquent, sur $\eta$, une ligne du septième ordre rencontrant $g_2$ en 14 points. Restent 14 coïncidences de points A avec B′ ou B avec A′; mais si A se confond avec B′, les deux coniques $c_2$ situées dans le plan ($\alpha\beta$, AB) se confondent et B coïncide avec A′; donc les 14 coïncidences de points A et B′ ou B et A′ sont, deux à deux, sur sept droites issues de O. Ainsi $S_{16}$, outre sa droite 12ple, a 7 coniques doubles; à la vérité, elle a encore deux autres coniques doubles, pour les coïncidences de points A et B, ou pour les tangentes de $g_2$ issues de O, mais ces deux dernières coniques sont étrangères à ce qui va suivre, parce qu'elles ne répondent pas à des points doubles de la section de $S_{16}$ par le plan $\eta$.

D'après cela, il y a sept coniques $c_2$ qui rencontrent une fois chacune des directrices 1, 2, 3, deux fois la courbe $g_2$ et qui rencontrent une droite quelconque 4. Donc on peut énoncer le résultat suivant, conforme au n° 12.

*Les coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$, qui coupent deux fois une conique donnée et s'appuient sur trois droites données engendrent une surface du septième ordre ayant $\alpha\beta$ comme droite quintuple.*

**36.** La surface $S_7$ définie ci-dessus peut-être traitée par une méthode analogue à celle du n° 20. Pour plus de clarté, nous choisirons d'abord un tétraèdre de référence spécial : l'arête $x_1 = x_3 = 0$ sera l'axe $\alpha\beta$, $\alpha_x$ et $\beta_x$ seront remplacés par $x_1$ et $x_3$; nous supposerons que ces deux plans touchent la conique directrice $g_2$ située dans la face $x_4 = 0$; enfin

la face $x_2$ passera par les points de contact de $g_2$ avec $x_1$ et $x_5$. La conique $g_2$ peut alors être représentée par les équations

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta^2 : \theta : 1 : 0.$$

Un plan $x_1 = \omega x_5$ passant par l'axe coupe $g_2$ en deux points $N_1$ et $N_2$ dont les paramètres sont respectivement $+\sqrt{\omega}$ et $-\sqrt{\omega}$. Joignons ces points au sommet A ($x_1 = x_2 = x_4 = 0$) du tétraèdre et utilisons ces deux droites (variables avec $\omega$) comme nous avons (n° 20) utilisé les directrices 4 et 5. Nous avions trouvé une équation

$$(\varepsilon\gamma\delta\alpha) + k_1(\varphi\gamma\delta\alpha) + \omega(\varepsilon\gamma\delta\beta) + k_1\omega(\varphi\gamma\delta\beta) = 0$$

qui se transforme à présent de la manière suivante : $\varepsilon_x$ et $\varphi_x$ deviennent $x_4 = 0$ et $x_1 = +\sqrt{\omega}\, x_2$ ; le déterminant $(\varphi\gamma\delta\alpha)$ se réduit donc à

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \delta_1 & 1 \\ -\sqrt{\omega} & \gamma_2 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & \delta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_4 & \delta_4 & 0 \end{vmatrix} = +\sqrt{\omega} \begin{vmatrix} \gamma_3 & \delta_3 \\ \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = +\sqrt{\omega}\, q_{34},$$

$q_{ij}$ représentant les coordonnées pluckériennes de la directrice $\gamma\delta$ ou 1. On trouve de même

$$(\varepsilon\gamma\delta\alpha) = -q_{25}, \quad (\varepsilon\gamma\delta\beta) = q_{12}, \quad (\varphi\gamma\delta\beta) = q_{42} - \sqrt{\omega}\, q_{14}.$$

Par suite, $k_1$ est le quotient de deux fonctions de $\omega$, la première est rationnelle et linéaire en $\omega$, la seconde, $(\varphi\gamma\delta\alpha) + \omega(\varphi\gamma\delta\beta)$ est le produit de $\sqrt{\omega}$ par un polynôme complet, du second degré en $\sqrt{\omega}$ ; donc $k_1\sqrt{\omega}$, $k_2\sqrt{\omega}$, $k_3\sqrt{\omega}$ sont des rapports de fonctions quadratiques de $\sqrt{\omega}$ ;

$$k_i = \frac{f_i}{\sqrt{\omega}\, F_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

L'une des équations (1) du n° 20 devient

$$\left(\frac{f_1}{\sqrt{\omega}\, F_1} - \frac{f_5}{\sqrt{\omega}\, F_5}\right)\left(\frac{f_2}{\sqrt{\omega}\, F_2} - \frac{x_4}{x_1 - \sqrt{\omega}\, x_2}\right)$$
$$= \lambda\left(\frac{f_2}{\sqrt{\omega}\, F_2} - \frac{f_5}{\sqrt{\omega}\, F_5}\right)\left(\frac{f_1}{\sqrt{\omega}\, F_1} - \frac{x_4}{x_1 - \sqrt{\omega}\, x_2}\right),$$

ou encore, en remplaçant $x_1$ par $\omega x_5$,

$$(5) \qquad (f_1F_5 - f_5F_1)(f_2\omega x_5 - f_2\sqrt{\omega}\, x_2 - x_4\sqrt{\omega}\, F_2)$$
$$= \lambda(f_2F_5 - f_5F_2)(f_1\omega x_5 - f_1\sqrt{\omega}\, x_2 - x_4\sqrt{\omega}\, F_1).$$

La seconde équation ne diffère de celle-ci que par la substitution de $+\sqrt{\omega}$ à $-\sqrt{\omega}$, car les droites $AN_1$ et $AN_2$ ne diffèrent que par le signe de ce radical. Au reste, les deux équations peuvent d'abord être débarassées du facteur $\sqrt{\omega}$ et alors elles sont linéaires en $x_2$, $x_5$, $x_4$, linéaires en $\lambda$ et du septième ordre en $\sqrt{\omega}$.

Par addition, les termes en $(\sqrt{\omega})^{2i+1}$ disparaissent, et on a une relation rationnelle et cubique en $\omega$; par soustraction, les termes en $(\sqrt{\omega})^{2i}$ disparaissent et l'on peut diviser par $\sqrt{\omega}$, ce qui donne encore une relation rationnelle et cubique en $\omega$; même les termes en $x_2$ ne contiendront $\omega$ qu'à la deuxième puissance. De ces deux égalités, on peut tirer $x_2$ en fonction de $\lambda^2$ et $\omega^6$, $x_5$ et $x_4$ en fonction de $\lambda^2$ et $\omega^5$ et comme $x_1 = \omega x_5$, $x_1$ sera fonction de $\lambda^2$ et $\omega^6$.

Ainsi l'on aura une représentation plane de $S_7$ et les courbes fondamentales, du 8e ordre, auront en commun un point sextuple, un point double et 17 points simples correspondant à 17 coniques dégénérées.

Cette représentation de $S_7$ pourrait donner lieu à des développements analogues à ceux que nous avons donnés pour la surface $S_8$. Nous ne les exposons pas pour ne pas nous répéter.

Nous ne donnons pas non plus l'équation de $S_7$, parce que le calcul est trop long. Il suffira de l'indiquer; l'équation (5) débarassée du facteur $\sqrt{\omega}$ peut s'écrire

$$U + \sqrt{\omega}\, V = \lambda\,(U' + \sqrt{\omega}\, V');$$

l'équation analogue est

$$U - \sqrt{\omega}\, V = \lambda\,(U' - \sqrt{\omega}\, V');$$

on en déduit

$$UV' = U'V,$$

qui est entière et rationnelle en $\omega$ et où il suffit de remplacer $\omega$ par $x_1 : x_5$ pour avoir la relation cherchée.

**37**. Nous avons dit, en parlant de la surface $S_8$ à cinq directrices rectilignes, qu'il fallait réserver le cas où l'axe $\alpha\beta$ rencontre une des directrices, la droite 5 par exemple, en un point O. Le problème est alors le suivant : trouver la surface engendrée par une conique qui passe par un point fixe O, qui s'appuie sur quatre directrices rectilignes et dont le plan passe par un axe fixe $\alpha\beta$, mené évidemment du point O.

La méthode employée pour trouver l'équation de la surface $S_8$ est

identiquement applicable et le résultat se simplifie comme il suit. La relation (4),

$$\frac{[(\alpha\beta)(1,3,4)]\,[(\alpha\beta)(2,3,5)]\,(\alpha\beta,2,4)\,(\alpha\beta,1,5)}{[(\alpha\beta)(2,3,4)]\,[(\alpha\beta)(1,3,5)]\,(\alpha\beta,1,4)\,(\alpha\beta,2,5)} = \text{constante}$$

représente la surface cherchée; mais le couple de plans $[(\alpha\beta)(2,3,5)]$ se compose du plan $(\alpha\beta, 5)$ et du plan $(\alpha\beta, 0, 2, 3)$ contenant la droite issue de 0 qui s'appuie sur les directrices 2 et 3 ; on a de même

$$[(\alpha\beta)(1,3,5)] = (\alpha\beta,5) \times (\alpha\beta,0,1,3);$$

la quadrique $(\alpha\beta, 1, 5)$ dégénère en deux plans, savoir $(\alpha\beta, 5)$ et $(0, 1)$; de même $(\alpha\beta, 2, 5) = (\alpha\beta, 5) \times (0, 2)$. Les deux termes de la fraction ci-dessus contiennent le facteur $(\alpha\beta, 5)^2$ et, après suppression de ce facteur, il reste une équation du sixième degré

$$\frac{[(\alpha\beta)(1,3,4)]\,(\alpha\beta,0,2,3)\,(\alpha\beta,2,4)\,(0,1)}{[(\alpha\beta)(2,3,4)]\,(\alpha\beta,0,1,3)\,(\alpha\beta,1,4)\,(0,2)} = \text{constante}.$$

Les conséquences que l'on pourrait tirer de cette forme sont analogues à celles que l'on a déduites de l'équation de $S_8$. Enonçons quelques résultats :

*Les coniques passant par un point fixe, s'appuyant sur quatre directrices rectilignes et dont le plan tourne autour d'un axe fixe engendrent une surface du sixième ordre* $S_6$ *ayant l'axe comme droite quadruple et le point fixe comme point quintuple.* $S_6$ *peut être considérée comme le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux systèmes formés chacun d'une quadrique et de quatre plans. Quatorze coniques génératrices dégénèrent en deux droites. Dix coniques sont des paraboles. La développable circonscrite le long d'une génératrice est de troisième classe. Etc.*

**38.** Nous avons rencontré précédemment une surface $S_{16}$ à cinq directrices dont quatre droites et une conique rencontrée une fois par chaque génératrice ; si cette conique rencontre l'axe en un point 0, la surface $S_{16}$ se décompose en une surface du sixième ordre dont les coniques génératrices passent par 0, plus une surface $S_{10}$ engendrée par des courbes $c_2$ reposant sur les quatre droites et sur la conique directrice en un point autre que 0.

Voici encore d'autres figures décrites par des coniques. En partant de la surface $S_8$ du n° précédent et en appliquant les raisonnements des n°s 17, 33, 34 on trouve les résultats suivants.

Si les coniques passant par un point fixe O de l'axe, rencontrent trois droites et une conique, chacune une fois, la surface est du douzième ordre, avec $\alpha\beta$ comme droite octuple et O comme point décuple. Si elles reposent sur trois droites et touchent un plan, la surface est du dixième ordre avec l'axe pour droite sextuple et O pour point octuple. Si elles reposent sur deux droites et rencontrent deux fois une conique, la surface est du cinquième ordre avec l'axe pour droite triple et O pour point quadruple.

**39.** Si dans la surface $S_8$ à cinq directrices rectilignes 1, 2, 3, 4, 5, les directrices 4 et 5 rencontrent l'axe respectivement en O et O', toutes les coniques génératrices passent par ces deux points. Pourtant la méthode employée pour étudier la surface $S_8$ peut être appliquée intégralement et le résultat subit deux fois la réduction que nous avons trouvée au n° 37 pour la surface $S_6$.

Ainsi, *toutes les coniques passant par deux points fixes* O *et* O' *et s'appuyant sur trois droites* 1, 2, 3, *engendrent une surface du quatrième ordre* $S_4$ *ayant la droite* OO' *pour droite double et les points* O *et* O' *pour points triples.*

L'équation de $S_4$ est de la forme

$$\frac{(\alpha\beta, 0, 2, 3)\,(\alpha\beta, 0', 1, 3)\,(0, 1)\,(0', 2)}{(\alpha\beta, 0, 1, 3)\,(\alpha\beta, 0', 2, 3)\,(0, 2)\,(0', 1)} = \text{constante}.$$

L'application de nos méthodes précédentes à cette surface $S_4$ fournit encore les propriétés suivantes.

Le lieu d'un point M de $S_4$ qui forme un rapport anharmonique constant avec les points d'appui de la conique génératrice sur les trois directrices est une cubique gauche $c_3$ admettant $\alpha\beta$ comme bisécante. Les coniques génératrices marquent, sur ces courbes $c_3$, des ponctuelles projectives, et inversement. Par chaque point triple de $S_4$, il passe six droites de la surface, autres que l'axe. Parmi les coniques génératrices, il y a six paraboles, etc.

**40.** Si deux directrices 2, 3 de la surface $S_4$ ont un point commun, la surface n'est plus que du troisième ordre ($S_3$) et a deux points doubles O et O'. Outre la droite OO', il ne passe plus, par chacun de ces points, que quatre droites de $S_3$.

La surface cubique la plus générale a 27 droites, mais toute droite passant par un point double compte double et une droite joignant deux points doubles compte quadruple.

La surface cubique à deux points doubles, O et O′, la plus générale a quatre droites par chacun des points O et O′, outre la droite OO′ (n° 16); soient $m$, $n$, $p$ trois droites par O; la section de la surface par chacun des plans $mn$ et $mp$ se complète par une droite $q$, $r$; les rayons $q$ et $r$ ne se rencontrent pas et ne coupent pas OO′. Les plans menés par $q$ coupent la surface suivant des coniques; de ces coniques, cinq dégénèrent en deux droites, savoir deux coïncidentes à point double en O, deux coïncidentes à point double en O′ et une cinquième $s+t$; une des droites $s$ et $t$, par exemple $s$, rencontre OO′ et toutes les droites telles que $q$ et $r$, car une des coniques du faisceau (OO′) se compose (voir n° 16) de OO′ et de la droite $s$; donc $t$ ne rencontre ni OO′ ni $r$, parce que quatre droites de la surface cubique ne peuvent pas être dans un plan.

Ainsi la surface cubique à deux points doubles la plus générale admet trois directrices rectilignes $q$, $r$, $t$, dont deux se coupent.

*La surface* $S_5$ *que nous rencontrons dans notre étude est donc la surface cubique à deux points doubles la plus générale.*

*Corollaire.* Si l'on prend, par rapport à la surface $S_4$ du n° précédent, la première polaire d'un point quelconque, on a la surface $S_5$ ci-dessus.

Pour les surfaces $S_4$ et $S_5$, deux coniques génératrices infiniment voisines ont deux points communs; donc la développable circonscrite le long d'une conique génératrice est de seconde classe. Les surfaces $S_4$ et $S_5$ sont donc à la fois lieux de coniques et enveloppes de cônes du second ordre. M. Blutel a naturellement rencontré ces deux figures, dans le mémoire que nous avons cité et où il recherche toutes les surfaces susceptibles de cette double génération.

**41.** En appliquant les résultats des n°s 17, 33, 34 à la surface $S_4$ du n° 39, on trouve les propriétés suivantes.

Les coniques passant par deux points fixes qui rencontrent, une fois chacune, deux droites et une conique, engendrent une surface du huitième ordre ayant les points fixes pour points sextuples et la droite qui les joint pour droite quadruple. Si elles s'appuient sur deux droites et touchent un plan, la surface est du sixième ordre, avec les points fixes pour points quadruples et l'axe pour droite double. Si elles

rencontrent une fois une droite et deux fois une conique $\gamma_2$, la surface est du troisième ordre à deux points doubles.

Dans ce dernier cas, la section par le plan de $\gamma_2$ se complète par une droite $d$; en faisant tourner un plan autour de $d$, la section résidue sera généralement une conique et exceptionnellement un couple de droites concourantes; en prenant ces droites pour directrices, on est ramené au cas du n° précédent.

La surface cubique obtenue ici est donc encore une fois la surface la plus générale à deux points doubles.

# CHAPITRE III.

## Sur une gerbe linéaire de cubiques gauches.

**47.** Appelons *gerbe linéaire de cubiques gauches* un ensemble de lignes du troisième ordre tel que, par tout point de l'espace, il passe une courbe de cet ensemble et une seule.

On connaît un certain nombre de systèmes pareils; leurs caractéristiques ont été étudiées par M. STURM (*).

Deux de ces systèmes ont fait l'objet d'un examen plus approfondi : l'un, que nous appelons *gerbe de Reye* se compose de toutes les cubiques gauches passant par cinq points (**); l'autre, que nous appellerons *gerbe de Sturm* est l'ensemble des courbes du troisième ordre admettant, de la même manière, un même tétraèdre d'osculation (***).

A l'inverse de ce qui se présente pour les faisceaux de coniques, ces deux systèmes de cubiques gauches ne se déduisent pas l'un de l'autre par spécialisation. Bien plus, ils présentent des différences notables; aussi avons-nous recherché quel est, à défaut de filiation, le lien de parenté de ces deux gerbes. Le résultat de ces recherches sera exposé ci-après et peut se résumer de la manière suivante.

---

(*) R. STURM, *Erzeugnisse, Elementarsysteme u. Charakteristiken von cubischen Raumcurven* (Journ. f. Math , t. 79). — id., *Weitere Untersuchungen über cub. Raume.* (ib., t. 80). — id., *Ueber höhere Nullsysteme* (Math. Ann , t. 28).

(**) TH. REYE, *Ueber Curvenbündel 3ter Ordnung* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., t. 13). — G. KÖNIGS, *Sur les cubiques gauches passant par cinq points donnés* (Nouv. Ann. de Math. (3) II). — G. HUMBERT, *Sur un complexe remarquable de coniques* (Journ. de l'Ec. polyt., LXIV).

(***) R. STURM, *Ueber Collineationen u. Correlationen, welche*, etc. (Math. Ann., t. 26). — R. HEINRICHS, *Ueber den Bündel derjenigen kubischen Raumcurven, welche*, etc. (Diss. Munster, 1887). — K. DÖHLEMANN, *Zur Theorie des Nullsystems* (Jahresber. d. Deutschen Math. Vereinig., t. 3). — M. STUYVAERT, *Notes sur les cubiques gauches* (Bull. de l'Ac. roy. de Belgique, 1900).

*Les gerbes de Reye et de Sturm sont des cas particuliers d'une gerbe plus générale* G.

Cette circonstance justifie déjà, suivant nous, l'étude simultanée de ces systèmes. Un autre intérêt s'y ajoute; nous montrerons en effet que *la gerbe* G *est susceptible d'une représentation analytique simple.*

**43.** Si l'on désigne par $a_x$, $b_x$, ..., des formes quaternaires du premier degré, on sait que les équations

$$(1) \qquad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a'_x}{b'_x} = \frac{a''_x}{b''_x} = \omega$$

représentent la cubique gauche la plus générale.

Les relations $a_x = 0$, $b_x = 0$, ... représentent des plans que nous désignons respectivement par $a$, $b$, ... La courbe définie par les équations (1) passe par le point A commun aux plans $a$, $a'$, $a''$, et par le point B commun aux plans $b$, $b'$, $b''$; elle admet les droites $ab$, $a'b'$, $a''b''$ comme bisécantes. Par hypothèse, $a$, $a'$, $a''$ ne passent pas par une même droite, non plus que $b$, $b'$, $b''$; et le système réglé défini par $ab$, $a'b'$, $a''b''$ ne contient ni A, ni B.

Si, dans les relations (1), on multiplie les numérateurs par trois constantes $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, les nouvelles égalités

$$(2) \qquad \frac{\alpha a_x}{b_x} = \frac{\alpha' a'_x}{b'_x} = \frac{\alpha'' a''_x}{b''_x}$$

représentent une autre cubique gauche.

*Ces égalités représentent une gerbe linéaire de cubiques gauches, quand* $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ *sont des paramètres variables.*

En effet, les valeurs de ces paramètres sont déterminés quand on se donne un point $x$ de la courbe.

Réciproquement, toutes les cubiques gauches passant par A et B, et admettant $ab$, $a'b'$, $a''b''$ comme bisécantes sont comprises dans le système (2), car une quelconque de ces courbes peut-être engendrée par trois faisceaux projectifs de plans, ayant pour axes $ab$, $a'b'$, $a''b''$; dans ces faisceaux, les plans $a$, $a'$ $a''$ doivent se correspondre, ainsi que $b$, $b'$, $b''$; donc les équations de la projectivité peuvent s'écrire

$$\alpha a_x - \omega b_x = 0, \quad \alpha' a'_x - \omega b'_x = 0, \quad \alpha'' a''_x - \omega b''_x = 0,$$

$\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, étant déterminés par un troisième terne de plans correspondants.

Ce raisonnement revient à dire que trois bisécantes et trois points déterminent une cubique gauche, ce qui est connu; si l'on fait abstraction de l'un des trois points, on a un système doublement infini de courbes constituant ce que nous avons appelé la gerbe G.

*La gerbe* G *est l'ensemble des cubiques gauches ayant en commun trois bisécantes et deux points.*

**44.** Si les plans $a$, $a'$, $b$, $b'$, passent par un même point C, les courbes de la gerbe ont en commun trois points et trois bisécantes dont deux passent par un des points donnés.

Si en outre $a$, $a''$, $b$, $b''$ passent par un même point D, les courbes ont en commun quatre points, plus deux bisécantes passant chacune par un des points donnés.

Si enfin les plans $a'$, $a''$, $b'$, $b''$ ont, eux aussi, un point commun E, les cubiques considérées passent par les cinq points A, B, C, D, E et forment la gerbe de Reye.

Ainsi, *la gerbe de Reye est un cas particulier de la gerbe* G *et est caractérisée par l'évanouissement des invariants*

$$(aba'b'), \quad (aba''b''), \quad (a'b'a''b'').$$

**45.** D'autre part, si le plan $b$ coïncide avec $a'$ et le plan $b'$ avec $a''$, on peut effectuer un changement de coordonnées et prendre pour tétraèdre de référence le tétraèdre $aa'a''b''$; les équations (2) deviennent

$$\frac{\alpha x_1}{x_2} = \frac{\alpha' x_2}{x_3} = \frac{\alpha'' x_3}{x_4} = \omega$$

et, pour toutes les valeurs de $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, elles représentent une cubique gauche osculant le plan $x_1$, au point $x_1\, x_2\, x_3$, et y touchant $x_1 x_2$, osculant de même le plan $x_4$ au point $x_2 x_3 x_4$ et y touchant $x_3 x_4$; en d'autres termes, les cubiques du système admettent, de la même manière, un même tétraèdre d'osculation.

Donc, *la gerbe de Sturm est un cas particulier de la gerbe* G *et se caractérise par les identités*

$$a'_x \equiv b_x, \quad a''_x \equiv b'_x.$$

Remarquons toutefois que la gerbe G n'est pas la plus générale. On sait, en effet(*) que cinq bisécantes et un point, ou quatre bisécantes

(*) Cremona, *Note sur les cubiques gauches* (Journ. f. Math t. 60).

et deux points, ou une bisécante et cinq points déterminent une courbe du troisième ordre. Par suite, cinq bisécantes, ou quatre bisécantes et un point, ou une bisécante et quatre points déterminent une gerbe de cubiques; ces systèmes doivent être étudiés à part.

**46**. Nous nous occuperons à présent de la gerbe G et, pour nous conformer au titre du présent travail, nous donnerons une attention spéciale à quelques surfaces qui prennent naissance quand on soumet les courbes $c_3$ de la gerbe à une condition supplémentaire.

Rattachons d'abord cette étude au chapitre précédent en recherchant les courbes $c_3$ qui dégénèrent en une droite $d$ et une conique $c_2$. La courbe $c_2$ ne peut avoir pour bisécantes deux des droites $ab$, $a'b'$, $a''b''$, si ces droites sont sans point commun.

Donc, ou bien la conique $c_2$ admet une des droites $ab$, $a'b'$, $a''b''$ pour bisécante, ou bien elle les rencontre toutes trois une fois.

Dans le premier cas, la droite $d$ passe par A (ou B) et s'appuie sur deux droites, par exemple $a'b'$, $a''b''$, tandis que $c_2$ est dans le plan (A, $ab$) et passe par A, ainsi que par les traces, sur ce plan, des droites $a'b'$, $a''b''$, $d$; les coniques qui satisfont à ces conditions forment six faisceaux dans les plans menés par A ou B et un des axes $ab$, $a'b'$, $a''b''$; à ces six faisceaux répondent les six droites issues de A et B et s'appuyant sur deux des axes $ab$, $a'b'$, $a''b''$.

Dans le second cas, les coniques $c_2$ passent par A et B et s'appuient sur $ab$, $a'b'$, $a''b''$; d'après le chapitre II, elles engendrent une surface du quatrième ordre, tandis que les droites $d$ correspondantes décrivent le système réglé admettant $ab$, $a'b'$, $a''b''$ comme directrices. Chaque conique $c_2$ coupe la quadrique support de ce système réglé en quatre points dont trois sont sur $ab$, $a'b'$, $a''b''$; par le quatrième il passe une droite $d$. Chaque droite $d$ coupe la surface du quatrième ordre en quatre points, dont trois sont sur $ab$, $a'b'$, $a''b''$; par le quatrième passe une conique $c_2$.

Ainsi, *les cubiques de la gerbe* G *qui dégénèrent en une droite et une conique forment deux systèmes : le premier comprend des coniques de six faisceaux répondant chacun à une droite unique; le second comprend les coniques génératrices d'une surface du quatrième ordre et les rayons d'un système réglé accouplés un à un.*

Le premier système comprend 18 cubiques dégénérant en trois

droites, puisque tout faisceau de coniques contient trois couples de droites.

Le second système comprend 7 cubiques dégénérant en trois droites, puisque la surface du quatrième ordre a 8 coniques réduites à des couples de droites; deux de ces droites coïncident avec AB, et répondent à une seule et même cubique dégénérée.

Une droite quelconque $g$ de l'espace, sans relation particulière avec les éléments donnés, rencontre six cubiques dégénérées du premier système, sur la conique, car elle perce une fois le plan de chaque faisceau; la droite $g$ perce quatre fois la surface du quatrième ordre et deux fois l'hyperboloïde, donc elle rencontre quatre cubiques dégénérées du second système sur la conique et deux sur la droite.

En résumé, *une droite* g *de l'espace rencontre douze cubiques dégénérées, dont dix sur la conique et deux sur la droite.*

**47**. Exprimons que la cubique gauche représentée par

$$\frac{\alpha a_x}{b_x} = \frac{\alpha' a'_x}{b'_x} = \frac{\alpha'' a''_x}{b''_x}$$

passe par un point ($x \equiv y + kz$) d'une droite donnée $yz$; nous aurons

$$\frac{\alpha a_y + k\alpha a_z}{b_y + kb_z} = \frac{\alpha' a'_y + k\alpha' a'_z}{b'_y + kb'_z} = \frac{\alpha'' a''_y + k\alpha'' a''_z}{b''_y + kb''_z}.$$

Donc la cubique de la gerbe G qui est déterminée par le point $y + kz$, sera représentée par deux équations et ces équations résultent de l'élimination de $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, entre les quatre égalités précédentes : voici ces résultantes.

$$\frac{b_x(a_y + ka_z)}{a_x(b_y + kb_z)} = \frac{b'_x(a'_y + ka'_z)}{a'_x(b'_y + kb'_z)} = \frac{b''_x(a''_y + ka''_z)}{a''_x(b''_y + kb''_z)}.$$

En éliminant $k$, on a l'équation de la surface engendrée par toutes les cubiques de la gerbe G qui s'appuient sur la droite $yz$.

Pour effectuer l'élimination de $k$, représentons par $\omega$ la valeur commune des trois derniers rapports; nous aurons la relation

$$b_x a_y + kb_x a_z - \omega a_x b_y - k\omega a_x b_z = 0$$

et deux autres analogues. Multiplions par $-\omega$, ce qui donne

$$-\omega b_x a_y - k\omega b_x a_z + \omega^2 a_x b_y + k\omega^2 a_x b_z = 0$$

et deux égalités analogues. Entre les six relations, linéaires (et non

homogènes) en $k$, $\omega$, $k\omega$, $\omega^2$, $k\omega^2$, on peut éliminer ces cinq paramètres et l'on a

$$T_6 \equiv \begin{vmatrix} b_x a_y & b_x a_z & a_x b_y & a_x b_z & & \\ b'_x a'_y & b'_x a'_z & a'_x b'_y & a'_x b'_z & & \\ b''_x a''_y & b''_x a''_z & a''_x b''_y & a''_x b''_z & & \\ & & b_x a_y & b_x a_z & a_x b_y & a_x b_z \\ & & b'_x a'_y & b'_x a'_z & a'_x b'_y & a'_x b'_z \\ & & b''_x a''_y & b''_x a''_z & a''_x b''_y & a''_x b''_z \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, *les cubiques de la gerbe* G *qui rencontrent une droite donnée engendrent une surface* $T_6$ *du sixième ordre.*

**48.** L'application du théorème de Laplace sur les déterminants permet d'écrire l'équation de $T_6$ sous la forme suivante :

$$T_6 \equiv U_3 V_3 - U'_3 V'_3 \equiv \begin{vmatrix} b_x a_y & b_x a_z & a_x b_y \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_x a_z & a_x b_y & a_x b_z \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} b_x a_y & b_x a_z & a_x b_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_x a_y & a_x b_y & a_x b_z \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de $T_6$ peut résulter de l'élimination de $\lambda$ entre les équations de l'un ou l'autre des systèmes ci-après

$$\begin{cases} U_3 = \lambda U'_3, \\ \lambda V_3 = V'_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} U_3 = \lambda V'_3, \\ \lambda V_3 = U'_3. \end{cases}$$

Donc, *la surface* $T_6$ *peut être engendrée, de deux manières, par deux faisceaux projectifs de surfaces cubiques.*

Ou encore, *la surface* $T_6$ *appartient à un faisceau dont deux surfaces particulières dégénèrent chacune en un couple de surfaces cubiques.*

**49.** Si une surface est représentée par l'évanouissement d'un déterminant à $m$ lignes et si les coordonnées d'un point annulent les termes de $k$ de ces lignes (ou de $k$ colonnes), ce point est multiple de l'ordre $k$ sur la surface. Prenons, en effet, le point considéré comme sommet ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) du tétraèdre de référence. Dans tout terme d'une ligne du déterminant qui s'annule, le degré en $x_1$, $x_2$, $x_3$ est généralement supérieur, d'une unité, au degré en $x_4$. Or, chaque terme du déterminant développé contient $k$ facteurs pris dans les lignes qui s'annulent. Donc, dans l'équation de la surface, le plus haut exposant de $x_4$ est $m - k$.

Appliquons ce résultat : les coordonnées du point A, commun aux plans $a$, $a'$, $a''$, annulent deux colonnes de $V_5$ et $V'_3$, une colonne de $U_5$ et $U'_3$.

Donc, *les points* A *et* B *sont des points triples de la surface* $T_6$.

De même, tout point commun aux plans $a$ et $b$ annule deux lignes du déterminant à six lignes que nous avons trouvé ci-dessus ; donc tout point de $ab$ est un point double de $T_6$; le même raisonnement s'applique aux droites $a'b'$, $a''b''$.

*Les axes* $ab$, $a'b'$, $a''b''$ *sont des droites doubles de la surface* $T_6$.

Les six droites issues de A ou B et s'appuyant sur deux des axes $ab$, $a'b'$, $a''b''$ sont tout entières sur la surface $T_6$ puisque chacune contient un point triple et deux points doubles. Au surplus ces six droites font partie, comme nous l'avons vu, de six cubiques dégénérées du premier système rencontrant $yz$. Quant à cette droite $yz$, elle est évidemment tout entière sur $T_6$.

Une courbe quelconque $c_\mu$ d'ordre $\mu$, sans relation particulière avec les données rencontre $T_6$ en $6\mu$ points; donc il y a $6\mu$ cubiques de la gerbe s'appuyant à la fois sur la courbe $c_\mu$ et sur la droite $yz$. On a donc les corollaires suivants.

*Les cubiques de la gerbe* G *qui s'appuient sur une courbe d'ordre* $\mu$ *engendrent une surface d'ordre* $6\mu$.

*Il y a six cubiques de la gerbe* G *qui rencontrent deux droites données.*

**50.** Avant de poursuivre l'étude de la surface $T_6$, déterminons la cubique de la gerbe G qui admet pour bisécante la droite $yz$; d'après un théorème connu, rappelé plus haut, on doit trouver une solution unique.

La suite proportionnelle

$$\frac{\alpha a_x}{b_x} = \frac{\alpha' a'_x}{b'_x} = \frac{\alpha'' a''_x}{b''_x} = \frac{\Sigma\lambda\alpha a_x}{\Sigma\lambda b_x}$$

montre que les équations

$$\begin{aligned} \lambda\alpha a_x + \lambda'\alpha' a'_x + \lambda''\alpha'' a''_x &= 0, \\ \lambda b_x + \lambda' b'_x + \lambda'' b''_x &= 0, \end{aligned}$$

où $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ sont trois paramètres arbitraires, représentent les bisécantes de la cubique.

Pour que l'une de ces bisécantes passe par deux points $y$ et $z$, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} \lambda\alpha a_y + \lambda'\alpha' a'_y + \lambda''\alpha'' a''_y &= 0, \\ \lambda\alpha a_z + \lambda'\alpha' a'_z + \lambda''\alpha'' a''_z &= 0, \\ \lambda b_y + \lambda' b'_y + \lambda'' b''_y &= 0, \\ \lambda b_z + \lambda' b'_z + \lambda'' b''_z &= 0. \end{aligned}$$

Les deux dernières relations donnent

$$\lambda : \lambda' : \lambda'' = | b'_y b''_z | : | b''_y b_z | : | b_y b'_z | ,$$

et les deux premières

$$\lambda\alpha : \lambda'\alpha' : \lambda''\alpha'' = | a'_y a''_z | : | a''_y a_z | : | a_y a'_z | ;$$

d'où, par division,

$$\alpha : \alpha' : \alpha'' = \frac{| a'_y a''_z |}{| b'_y b''_z |} : \frac{| a''_y a_z |}{| b''_y b_z |} : \frac{| a_y a'_z |}{| b_y b'_z |} \cdot (*)$$

Donc, les équations de la cubique cherchée sont

$$\frac{a_x}{b_x} \frac{| a'_y a''_z |}{| b'_y b''_z |} = \frac{a'_x}{b'_x} \frac{| a''_y a_z |}{| b''_y b_z |} = \frac{a''_x}{b''_x} \frac{| a_y a'_z |}{| b_y b'_z |} .$$

Reprenons à présent l'équation

$$T_6 = U_3 V_3 - U'_3 V'_3$$

de la surface engendrée par les cubiques de la gerbe G qui rencontrent $yz$. Une des fonctions cubiques, par exemple

$$U_3 = | b_x a_y \quad b_x a_z \quad a_x b_y | = b_x b'_x b''_x \left| a_y \quad a_z \quad \frac{a_x}{b_x} b_y \right| ,$$

devient, quand on y remplace $\frac{a_x}{b_x}$, $\frac{a'_x}{b'_x}$, $\frac{a''_x}{b''_x}$ respectivement par

$$\frac{| b'_y b''_z |}{| a'_y a''_z |} , \frac{| b''_y b_z |}{| a''_y a_z |} , \frac{| b_y b'_z |}{| a_y a'_z |} ,$$

$$| a'_y a''_z | \cdot | a''_y a_z | \cdot | a_y a'_z | \times U_3 =$$
$$b_x b'_x b''_x \, | a_y (a'_y a''_z) \quad a_z (a'_y a''_z) \quad b_y (b'_y b'_z) | .$$

Le dernier facteur du second membre est nul, car si l'on ajoute, terme à terme, les trois lignes, on obtient les trois sommes identiquement nulles

$$| a_y \, a_y \, a_z | , | a_z \, a_y \, a_z | , | b_y \, b_y \, b_z | .$$

Ainsi, tout point de la cubique de la gerbe G qui admet $yz$ pour bisécante est situé sur la surface $U_3 = 0$ et l'on vérifie de même que cette cubique appartient aux surfaces $U'_3$, $V_3$, $V'_3$.

*La surface* $T_6$ *a pour courbe double la cubique de la gerbe* G *qui admet la droite* yz *comme bisécante.*

---

(*) Un cas exceptionnel sera examiné au n° 63.

**51**. Si nous résumons les singularités de la surface $T_6$, nous lui trouvons trois droites doubles $ab$, $a'b'$, $a''b''$, une cubique double $c_3$ et, sur celle-ci, deux points triples A et B.

Les sections planes sont, en général, des sextiques à six nœuds; pour les sections passant par A et B, il y a quatre points doubles et deux points triples, ce qui équivaut à dix nœuds et ces sections sont unicursales.

Mais la surface $T_6$ est elle-même unicursale, et nous allons en donner une représentation plane assez simple.

D'abord, rien ne nous empêche de choisir, pour points $y$ et $z$ déterminant la droite $yz$, précisément les points d'appui de la cubique $c_3$ qui admet $yz$ comme bisécante. Nous avons trouvé les équations d'une cubique de la gerbe G définie par le point $y + kz$ de la droite $yz$ :

$$\frac{b_x(a_y + ka_z)}{a_x(b_y + kb_z)} = \frac{b'_x(a'_y + ka'_z)}{a'_x(b'_y + kb'_z)} = \frac{b''_x(a''_y + ka''_z)}{a''_x(b''_y + kb''_z)} = \omega.$$

Ces équations peuvent être remplacées par

$$b_x(a_y + ka_z) = \omega a_x(b_y + kb_z)$$

et deux autres analogues. On peut en tirer des valeurs de $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ proportionnelles à des fonctions du sixième degré en $k$ et $\omega$, mais où ces deux paramètres n'entrent qu'à la troisième puissance.

Posons

$$k = \frac{\mu_1}{\mu_3}, \quad \omega = \frac{\mu_2}{\mu_3};$$

nous pourrons écrire symboliquement

$$\sigma x_i = f_i(\mu_1^3, \mu_2^3, \mu_3^6).$$

Dans la représentation de la surface $T_6$ sur un plan $\pi$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ seront les coordonnées du point $\mu$, image du point $x$, rapporté à un triangle de référence FGH, où GH, HF, FG ont respectivement pour équation $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$.

**52**. Disons un mot de cette représentation paramétrique. Nous appellerons *courbes fondamentales* dans le plan $\pi$, les courbes images des sections planes de $T_6$. Elles sont du sixième ordre, et puisque $\mu_1$ et $\mu_2$ ne figurent qu'au troisième degré, dans leurs équations, elles ont un point triple en F ($\mu_2 = \mu_3 = 0$) et en G ($\mu_1 = \mu_3 = 0$).

Pour que la surface représentée soit du sixième ordre, il faut que les courbes fondamentales se coupent en $36 - 6 = 30$ points fixes; les

deux points triples communs comptent déjà pour 18 intersections; on doit donc trouver encore 12 points fondamentaux.

Aux droites passant par G et représentées par $\mu_1 : \mu_5 = k =$ constante, répondent les cubiques gauches génératrices de $T_6$. Mais celles de ces droites qui passent par un point fondamental autre que F et G correspondent à des coniques de $T_6$; les 12 points fondamentaux autres que F et G représentent donc chacun une droite d'une des douze cubiques dégénérées de la surface. La droite GH ou $\mu_1 = 0$ répond à $k = 0$, donc à la cubique génératrice passant par le point $y$, ou, d'après notre hypothèse à la cubique double de $T_6$.

La droite GF ou $\mu_5 = 0$ répond à $\omega = \infty$, $k = \infty$ et ces valeurs ne peuvent être réalisées en général que pour le seul point A.

Voyons maintenant les diverses cubiques génératrices de $T_6$ qui dégénèrent en une droite et une conique. Une de ces droites part de A et s'appuie sur $ab$ et $a'b'$; c'est donc la droite $aa'$; dans les équations

$$\frac{b_x(a_y + ka_z)}{a_x(b_y + kb_z)} = \frac{b'_x(a'_y + ka'_z)}{a'_x(b'_y + kb'_z)} = \frac{b''_x(a''_y + ka''_z)}{a''_x(b''_y + kb''_z)} = \omega,$$

qui représentent une cubique génératrice de $T_6$, si $a_x = 0$ et $a'_x = 0$, on a $\omega = \infty$ et $k = -\frac{b''_y}{b''_z}$; l'image de la droite $aa'$ sur le plan $\pi$ est donc le point triple G lui-même; la droite du plan $\pi$ représentée par $k = \mu_1 : \mu_5 = -b''_y : b''_z$ répond donc à la conique qui, avec $aa'$, constitue une cubique dégénérée de $T_6$ et coupe donc toutes les courbes fondamentales en deux points variables seulement; elle est donc tangente, en G, à toutes les courbes fondamentales. Il en est de même des droites images des coniques qui constituent, avec $a'a''$ et $a''a$, des cubiques dégénérées.

Quant aux droites $bb'$, $b'b''$, $b''b$, elles ont pour image, chacune un point situé sur le côté HF ($\mu_2 = 0$, $\omega = 0$).

Aux droites du plan $\pi$ qui passent par le point triple F, répondent des cubiques gauches de $T_6$, autres que les cubiques génératrices. Nous y reviendrons bientôt. Observons seulement ici les exceptions qui se présentent : la droite FH ou $\mu_2 = 0$ donne $\omega = 0$ ce qui répond au point B ou à une des droites $bb'$, $b'b''$, $b''b$, représentées par trois points de FH; nous avons déjà vu que FG représente le point A et les rayons $aa'$, $a'a''$, $a''a$; quant à la droite menée par F et définie par $\mu_2 = \mu_5$ ou $\omega = 1$, elle répond à la droite $yz$, car, si dans les équations précé-

dentes, on fait $x \equiv y + kz$, on a $\omega = 1$; par suite cette droite $\mu_2 = \mu_3$ contient deux points fondamentaux répondant aux droites de $T_6$ qui s'appuient sur $ab$, $a'b'$, $a''b''$, $yz$.

Enfin il y a, dans le plan $\pi$, quatre points fondamentaux simples; ils représentent les droites appartenant aux cubiques dégénérées qui sont rencontrées par $yz$ sur leurs coniques.

En résumé, *les courbes fondamentales du plan* $\pi$ *ont en commun un point triple* G *et trois tangentes communes en ce point, plus un point triple* F, *plus neuf points communs simples, dont trois alignés sur* F *et deux autres alignés sur* F.

**53.** Nous venons de trouver sur $T_6$, une seconde série de cubiques gauches $c'_3$; les courbes génératrices seront appelées $c_3$.

Les courbes images de $c'_3$ ont pour équation $\mu_2 : \mu_3 = \omega = \text{const.}$; chaque cubique $c'_3$ est donc le lieu des points de même paramètre sur les cubiques génératrices.

Une courbe $c'_3$ dans l'espace est représentée par les équations suivantes, où $\omega$ a une valeur particulière :

$$\frac{b_x a_y - \omega a_x b_y}{b_x a_z - \omega a_x b_z} = \frac{b'_x a'_y - \omega a'_x b'_y}{b'_x a_z - \omega a'_x b'_z} = \frac{b''_x a''_y - \omega a''_x b''_y}{b''_x a''_z - \omega a''_x b''_z} = k.$$

*Les courbes* $c'_3$ *ont donc* $ab$, $a'b'$, $a''b''$ *pour bisécantes.*

Dans la seconde série de cubiques $(c'_3)$, trois courbes dégénèrent en trois droites, savoir : pour $\omega = 1$, la droite $yz$ et les deux directrices du système réglé $(ab, a'b', a''b'')$ qui rencontrent $yz$; pour $\omega = 0$, les droites $bb'$, $b'b''$, $b''b$; pour $\omega = \infty$, les droites $aa'$, $a'a''$, $a''a$.

Quatre autres cubiques $c'_3$ se décomposent en une droite et une conique; les images de ces coniques sont les droites joignant F aux quatre derniers points fondamentaux trouvés.

**54.** Pour $k$ constant et $\omega$ variable, on a une cubique $c_3$ génératrice de $T_6$; donc les courbes de la première série sont aussi des lieux de points de même paramètre sur les courbes de la deuxième série.

Si l'on donne, à $\omega$, deux valeurs particulières $\omega_1$ et $\omega_2$, on détermine deux cubiques $c'_3$; aux mêmes valeurs du paramètre $k$, répondent les intersections de ces courbes par les mêmes cubiques $c_3$; mais les points répondant aux mêmes valeurs de $k$ sont projetés de $ab$ suivant les faisceaux de plans

$$b_x a_y - \omega_1 a_x b_y + k\,(b_x a_z - \omega_1 a_x b_z) = 0,$$
$$b_x a_y - \omega_2 a_x b_y + k\,(b_x a_z - \omega_2 a_x b_z) = 0$$

et ces faisceaux sont projectifs. Donc toutes les courbes $c_3$ marquent, sur deux courbes $c'_3$, des ponctuelles projectives.

On démontre de même que les cubiques $c'_3$ marquent, sur deux courbes $c_3$, des séries projectives de points.

Ainsi, *chacune des séries de cubiques gauches de $T_6$ marque, sur les courbes de l'autre série, des ponctuelles projectives.*

**55.** Une relation de la forme $k\omega + \beta k + \gamma\omega + \delta = 0$ établit une espèce de collinéation entre les deux systèmes de courbes $c_3$ et $c'_3$. Le lieu des points de rencontre des courbes homologues est une courbe de $T_6$, dont l'image sur le plan $\pi$ est une conique passant par F et G; donc la courbe sur $T_6$ est en général du sixième ordre. Mais cette courbe peut s'abaisser au cinquième, au quatrième ou au troisième ordre, quand la conique image passe par un, deux ou trois points fondamentaux autres que F et G.

**56.** Une bisécante de la cubique

$$\frac{b_x(a_y + ka_z)}{a_x(b_y + kb_z)} = \frac{b'_x(a'_y + ka'_z)}{a'_x(b'_y + kb'_z)} = \frac{b''_x(a''_y + ka''_z)}{a''_x(b''_y + kb''_z)}$$

est représentée par les équations

$$\Sigma\lambda b_x(a_y + ka_z) = 0, \quad \Sigma\lambda a_x(b_y + kb_z) = 0.$$

Si cette bisécante passe par un point fixe X, on a

$$\Sigma\lambda b_x(a_y + ka_z) = 0, \quad \Sigma\lambda a_x(b_y + kb_z) = 0.$$

Ces deux dernières égalités donnent $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ en fonctions, du second degré, de $k$; en portant ces fonctions dans les deux premières égalités, on obtient deux relations cubiques en $k$ et linéaires en $x$; l'élimination de $k$ donne une équation du sixième ordre représentant le cône engendré par les bisécantes menées de X aux cubiques génératrices de la surface $T_6$. On a donc la propriété :

*Les cubiques de la gerbe G qui s'appuient sur une droite yz ont un système de bisécantes formant un complexe du sixième ordre.*

**57.** Après avoir étudié la surface $T_6$, lieu des cubiques de la gerbe G qui rencontrent une droite, il convient d'examiner ce que devient cette surface dans les deux cas particuliers de la gerbe de Reye et de celle de Sturm.

Lorsque les trois bisécantes $ab$, $a'b'$, $a''b''$ sont dans un même plan $\zeta$,

les cubiques passent par cinq points, et M. Reye a démontré que celles de ces cubiques qui rencontrent une droite engendrent une surface du cinquième ordre. Il est naturel de conjecturer que $T_6$ se décompose alors en une surface $T_5$ accompagnée du plan $\zeta$.

La vérification analytique est pénible; on la simplifie par un choix convenable du tétraèdre de référence : les bisécantes $ab$, $a'b'$, $a''b''$ deviendront les côtés de la face $x_4 = 0$ de ce tétraèdre; le point A sera le sommet opposé, et l'on peut toujours faire en sorte que les coordonnées de B soient égales (*). Dans ces conditions, il faut remplacer $a_x$, $a'_x$, $a''_x$ par $x_1$, $x_2$, $x_3$ et $b_x$, $b'_x$, $b''_x$ par $x_1 - x_4$, $x_2 - x_4$, $x_3 - x_4$. L'équation de la surface $T_6$ trouvée plus haut,

$$U_3 V_3 = U'_3 V'_3,$$

a dès lors pour premier membre

$$\begin{vmatrix} (x_i - x_4) y_i & (x_i - x_4) z_i & x_i (y_i - y_4) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} (x_i - x_4) z_i & x_i (y_i - y_4) & x_i (z_i - z_4) \end{vmatrix},$$

$i$ prenant les valeurs 1, 2, 3 dans les lignes successives des déterminants. On peut écrire l'expression précédente sous la forme

$$\begin{vmatrix} x_i y_i & x_i z_i & x_i (y_i - y_4) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_i z_i & x_i (y_i - y_4) & x_i (z_i - z_4) \end{vmatrix} + x_4 f(x_1, x_2, x_3).$$

Le terme indépendant de $x_4$ est égal à

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 \begin{vmatrix} y_i & z_i & y_i - y_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} z_i & y_i - y_4 & z_i - z_4 \end{vmatrix} = x_1^2 x_2^2 x_3^2 y_4 z_4 \begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} z_i & y_i - y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

ou enfin, si, dans le dernier déterminant, on ajoute, à la seconde colonne, les termes de la troisième multipliés par $y_4$,

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 y_4 z_4 \begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \end{vmatrix}^2.$$

Mais, dans l'équation

$$U_5 V_5 = U'_5 V'_5,$$

le second membre ne diffère du premier que par l'interversion de $y$ et $z$; donc le terme indépendant de $x_4$ est le même que dans le premier membre et la surface $T_6$ dégénère en une surface du cinquième ordre accompagnée du plan $x_4$. A la vérité, il faudrait voir encore si le terme en $x_4$ ne s'annule pas; mais nous ne ferons pas ce calcul, qui ne peut que nous faire retrouver une proposition connue et plutôt étrangère à notre sujet.

(*) C'est le système de coordonnées utilisé par M. Humbert (*loc. cit.*) pour la gerbe de Reye.

S'il s'agit de la *gerbe de Sturm*, il faut, d'après nos préliminaires, faire $a'_x \equiv b_x$, $a''_x \equiv b'_x$; la fonction $U_5V_5$ devient alors

$$\begin{vmatrix} b_x a_y & b_x a_z & a_x b_y \\ b'_x b_y & b'_x b_z & b_x b'_y \\ b''_x b'_y & b''_x b'_z & b'_x b''_y \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_x a_z & a_x b_y & a_x b_z \\ b'_x b_z & b_x b'_y & b_x b'_z \\ b''_x b'_z & b'_x b''_y & b'_x b''_z \end{vmatrix}$$

et le terme indépendant de $b_x$ s'obtient en faisant $b_x = 0$, ce qui donne

$$a_x b_y \begin{vmatrix} b'_x b_y & b'_x b_z \\ b''_x b'_y & b''_x b'_z \end{vmatrix} \times (-1)\, b'_x b_z \begin{vmatrix} a_x b_y & a_x b_z \\ b'_x b''_y & b'_x b''_z \end{vmatrix} \equiv$$

$$-(a_x)^2 (b'_x)^3 b''_x b_y b_z \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ b'_y & b'_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ b''_y & b''_z \end{vmatrix}.$$

Comme la fonction $U'_5V'_5$ se déduit de $U_5V_5$ par interversion de $y$ et $z$, le terme indépendant de $b_x$, dans l'équation de $T_6$, est identiquement nul; $T_6$ contient donc le facteur $b_x$ et, par analogie, aussi $b'_x$; les plans $b$ et $b'$ écartés, il reste une surface du quatrième ordre engendrée par les cubiques de la gerbe de Sturm qui s'appuient sur une droite. Ce théorème est connu.

**58.** Nous abordons la question des tangentes aux cubiques de la gerbe G. Celle de ces courbes qui passe par le point $y$ a pour équations

$$\frac{a_x b_y}{a_y b_x} = \frac{a'_x b'_y}{a'_y b'_x} = \frac{a''_x b''_y}{a''_y b''_x}.$$

Le réseau des hyperboloïdes circonscrits à cette courbe est représenté par l'équation suivante, $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ étant des paramètres arbitraires,

$$| a_x b_y \quad a_y b_x \quad \lambda | = 0.$$

Les plans tangents, en $y$, à ces quadriques sont représentés par la relation

$$| a_x b_y \quad a_y b_y \quad \lambda | + | a_y b_y \quad a_y b_x \quad \lambda | = 0,$$

ou encore par

$$| a_x b_y - a_y b_x \quad a_y b_y \quad \lambda | = 0.$$

Bien qu'elle contienne trois paramètres $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, cette équation représente un simple faisceau de plans dont l'axe est représenté par

$$\frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} = \frac{a'_x b'_y - a'_y b'_x}{a'_y b'_y} = \frac{a''_x b''_y - a''_y b''_x}{a''_y b''_y}.$$

Telles sont donc les équations de la tangente, en $y$, à la cubique de la gerbe G déterminée par ce même point $y$.

En y regardant les $y$ comme variables, on a le lieu des contacts des tangentes menées aux cubiques de la gerbe et passant par un point fixe $x$.

**59.** Considérons, plus généralement, les équations

$$\frac{m_x}{n_x^2} = \frac{m'_x}{n'^2_x} = \frac{m''_x}{n''^2_x},$$

où les $m$ représentent trois plans et les $n$ trois quadriques. Elles définissent une courbe gauche du septième ordre $k_7$.

En effet, si l'on égale le premier rapport successivement à chacun des deux autres, on obtient les équations de deux surfaces cubiques dont l'intersection est donc du neuvième ordre. Mais les points d'une certaine conique $c_2$ annulent les termes $m_x$, $n_x^2$ du premier rapport et satisfont donc aux équations des deux surfaces cubiques sans égaler, en général, les deux derniers rapports; l'intersection du neuvième ordre se compose donc de $c_2$ et d'une courbe du septième, $k_7$.

La théorie de cette courbe présente des analogies avec celle de la cubique gauche et nous espérons pouvoir nous en occuper dans un travail ultérieur. Ici nous n'entrerons pas dans le détail de cette étude qui nous entraînerait loin de notre sujet.

Constatons seulement que chacun des trois rapports proposés peut être remplacé par un rapport de la forme

$$\Sigma\lambda m_x : \Sigma\lambda n_x^2,$$

de sorte que la courbe $k_7$ établit une projectivité entre une gerbe de plans $m$ et un réseau de quadriques $n^2$. Or, il peut arriver, dans des cas particuliers, que des quadriques de ce réseau dégénèrent en deux plans; alors la conique $c_2$ se décompose en deux droites. Et même, si à une quadrique composée de deux plans, correspond, dans la gerbe $(m)$, un plan passant par l'intersection des deux plans précédents, on se trouvera dans un cas plus spécial encore et la conique $c_2$ se réduira à deux droites confondues. C'est précisément ce qui se présente dans les équations du n° précédent, que nous écrivons ici en intervertissant les $y$ et les $x$, de sorte que le point fixe est $y$ et les coordonnées courantes $x_i$ :

$$\frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x b_x} = \frac{a'_x b'_y - a'_y b'_x}{a'_x b'_x} = \frac{a''_x b''_y - a''_y b''_x}{a''_x b''_x}.$$

Le plan représenté par chaque numérateur passe par l'intersection

des plans définis par le dénominateur. La courbe gauche que nous rencontrons dans la gerbe G, est donc un cas particulier de la courbe $k_7$; elle est néanmoins encore du septième ordre. Si les axes $ab$, $a'b'$, $a''b''$ se coupent deux à deux, on a un cas plus particulier encore, relatif à la gerbe de Reye; ce cas a été étudié avec soin par M. HUMBERT.

Ainsi, *dans la gerbe* G *et dans la gerbe de Reye, le lieu des contacts des tangentes issues d'un point donné est une courbe gauche du septième ordre.*

**60.** Le résultat se modifie dans la *gerbe de Sturm*. Si $a' \equiv b$, $a'' \equiv b'$, les équations du n° précédent deviennent

$$\frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x} = \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b'_x}; \quad \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b_x} = \frac{b'_x b''_y - b'_y b''_x}{b''_x}.$$

Elles représentent une biquadratique; mais il faut en défalquer la droite $bb'$, dont les points annulent les termes du rapport moyen, sans égaler, en général, les rapports extrêmes du $n^o$ précédent. On retrouve ce théorème connu.

*Dans la gerbe de Sturm, les contacts des tangentes issues d'un point donné décrivent une cubique gauche.*

**61.** Dans la gerbe G, on a trouvé une courbe $c_7$, lieu des contacts des tangentes issues d'un point $y$. En faisant $x = y$, dans les équations de cette courbe, on les vérifie identiquement : $c_7$ passe donc par $y$. Or, le cône qui projette une courbe du septième ordre d'un de ses points est, en général, du sixième degré. La même propriété est connue pour la gerbe de Reye.

*Dans la gerbe* G *et dans la gerbe de la Reye, le complexe des tangentes est du sixième ordre.*

**62.** A la vérité, pour pouvoir affirmer cette dernière proposition, il faudrait établir que $y$ n'est pas un point double de la courbe $c_7$. Nous pourrions faire cette démonstration qui n'est pas fort difficile, mais il nous paraît préférable de chercher directement l'équation du cône qui projette $c_7$ du point $y$. Ceci se fait très simplement en remplaçant dans les équations de $c_7$, $x$ par $y + kx$ : nous aurons la relation

$$\frac{a_y b_y + k a_x b_y - a_y b_y - k a_y b_x}{a_y b_y + k(a_x b_y + a_y b_x) + k^2 a_x b_x} = \omega$$

et deux autres analogues, entre lesquelles il faut éliminer $k$ et $\omega$. On peut écrire la relation précédente comme il suit

$$k(a_x b_y - a_y b_x) - \omega a_y b_y - k\omega(a_x b_y + a_y b_x) - k^2 \omega a_x b_x = 0.$$

Multiplions par $k$; nous aurons, en tout, six relations linéaires et homogènes en $k$, $k^2$, $\omega$, $k\omega$, $k^2\omega$, $k^3\omega$; l'élimination de ces quantités donne l'équation suivante du cône $\Gamma_6$ formé par les tangentes de la gerbe G passant par $y$ :

$$\Gamma_6 \equiv \begin{vmatrix} a_x b_y - a_y b_x & 0 & a_y b_y & a_x b_y + a_y b_x & a_x b_x & 0 \\ 0 & a_x b_y - a_y b_x & 0 & a_y b_y & a_x b_y + a_y b_x & a_x b_x \\ a'_x b'_y - a'_y b'_x & 0 & a'_y b'_y & a'_x b'_y + a'_y b'_x & a'_x b'_x & 0 \\ 0 & a'_x b'_y - a'_y b'_x & 0 & a'_y b'_y & a'_x b'_y + a'_y b'_x & a'_x b'_x \\ a''_x b''_y - a''_y b''_x & 0 & a''_y b''_y & a''_x b''_y + a''_y b''_x & a''_x b''_x & 0 \\ 0 & a''_x b''_y - a''_y b''_x & 0 & a''_y b''_y & a''_x b''_y + a''_y b''_x & a''_x b''_x \end{vmatrix} = 0$$

Les coordonnées du point A annulent $a_x$, $a'_x$, $a''_x$ et par suite la dernière colonne du déterminant; de plus elles rendent la première colonne identique, au signe près, à la quatrième; donc A est un point double et $y$A une génératrice double du cône $\Gamma_6$. Donc $y$A est tangente à deux cubiques de la gerbe, mais, pour chacune d'elles, le contact doit avoir lieu en A, car une tangente en un point d'une cubique gauche ne peut plus rencontrer cette ligne ailleurs. Ainsi la droite $y$A rencontre $c_7$ en deux points autres que $y$ et ces points coïncident en A, c'est-à-dire que $y$A touche $c_7$ en A et que le cône $\Gamma_6$ a la droite $y$A pour génératrice de rebroussement.

La même chose a lieu pour le point B.

*Dans la gerbe* G, *le cône du complexe des tangentes ayant pour sommet un point quelconque a deux génératrices cuspidales passant par* A *et* B.

Il est bien évident que le même raisonnement s'applique aux cinq points de base d'une gerbe de Reye. Nous rencontrons ainsi ce théorème de M. Sturm, retrouvé plus tard par M. Humbert.

*Dans la gerbe de Reye, le cône du complexe des tangentes ayant pour sommet un point quelconque a cinq génératrices cuspidales passant par les points de base de la gerbe.*

**63.** Revenons à la gerbe G. Les faisceaux projectifs

$$\frac{a_x}{a_y} = k\frac{b_x}{b_y}, \quad \frac{a'_x}{a'_y} = k\frac{b'_x}{b'_y}$$

engendrent une quadrique passant par les droites $ab$, $a'b'$, par les points A et B et (pour $k = 1$) par le point $y$.

Par ce point $y$ on peut mener deux génératrices rectilignes de la quadrique : l'une est représentée par les équations précédentes où l'on fait $k = 1$; elle rencontre $ab$ et $a'b'$; l'autre, de même système que $ab$ et $a'b'$, a pour équations

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{a'_x}{a'_y} \quad \text{et} \quad \frac{b_x}{b_y} = \frac{b'_x}{b'_y}.$$

Appelons cette droite $d$; si pour un point particulier $x$ de cette droite, on a

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{a'_x}{a'_y} = \mu, \quad \frac{b_x}{b_y} = \frac{b'_x}{b'_y} = \nu,$$

on peut, dans le déterminant $\Gamma_6$ trouvé précédemment, remplacer $a_x$, $a'_x$, $b_x$, $b'_x$ par $\mu a_y$, $\mu a'_y$, $\nu b_y$, $\nu b'_y$ et l'on remarque que les termes de la première et de la troisième ligne sont proportionnels, de même que les termes de la seconde et de la quatrième ligne.

*Dans la gerbe* G, *le cône du complexe des tangentes ayant pour sommet un point* y *possède trois génératrices doubles* d; *ce sont des rayons de systèmes réglés passant tous trois par* A, B, y *et admettant respectivement pour rayons deux des droites* ab, a'b', a''b''.

Si deux de ces droites se rencontrent en un point C, le système réglé correspondant est un cône et la droite $d$ passe par C; elle devient alors, comme on l'a vu au n° précédent, une génératrice cuspidale de $\Gamma_6$.

Le problème du n° 50 (trouver une cubique de la gerbe G qui admet comme bisécante une droite donnée) est, en effet, indéterminé quand la droite en question $(yz)$ est la droite $d$ ci-dessus, c'est-à-dire quand on a

$$\frac{a_z}{a_y} = \frac{a'_z}{a'_y}, \quad \frac{b_z}{b_y} = \frac{b'_z}{b'_y}$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} a_y & a'_z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_y & b'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Car alors $\alpha''$ est indéterminé, tandis que l'on a

$$\alpha : \alpha' = \frac{\begin{vmatrix} a'_y & a''_z \\ b'_y & b''_z \end{vmatrix}}{} : \frac{\begin{vmatrix} a''_y & a_z \\ b''_y & b_z \end{vmatrix}}{}$$

Les cubiques qui répondent à la question sont donc

$$\frac{a_x \mid a'_y \quad a''_z \mid}{b_x \mid b'_y \quad b''_z \mid} = \frac{a'_x \mid a''_y \quad a_z \mid}{b'_x \mid b''_y \quad b_z \mid} = \frac{\alpha'' a''_x}{b''_x}.$$

Elles sont toutes sur la quadrique représentée par l'égalité des deux premiers rapports et cette quadrique passe visiblement par A, B, $ab$, $a'b'$ et évidemment par $d$, puisque cette droite est bisécante de toutes ces courbes.

Elles sont en outre chacune sur une quadrique du faisceau représenté par les deux derniers rapports ($\alpha''$ arbitraire); ce faisceau marque, sur $d$, une involution à deux points doubles correspondants à deux courbes de la gerbe qui touchent $d$.

**64.** Pour la *gerbe de Sturm*, nous avons vu que le lieu des contacts des tangentes issues d'un point $y$ est une cubique et que les équations

$$\frac{a_z b_y - a_y b_x}{a_x} = \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b'_z}; \quad \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b_z} = \frac{b'_x b''_y - b'_y b''_x}{b''_z}$$

représentent cette courbe plus la droite $bb'$.

Le point $y$ est sur la cubique et le cône qui la projette de $y$ est du second ordre; tel est donc aussi l'ordre du complexe des tangentes.

On vérifie d'ailleurs facilement que les sommets du tétraèdre $abb'b''$ sont sur la cubique gauche ci-dessus, quel que soit $y$.

Echangeons les $x$ et les $y$ dans les équations précédentes ; nous aurons les équations de la tangente, au point $y$, à la courbe de la gerbe qui passe par $y$ :

$$\frac{a_z b_y - a_y b_x}{a_y} = \frac{b_x b'_y - b_y b'_z}{b'_y}; \quad \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b_y} = \frac{b'_x b''_y - b'_y b''_x}{b''_y}.$$

Ces relations peuvent s'écrire aussi :

$$\frac{2b_x}{b_y} = \frac{a_x}{b_y} + \frac{b'_x}{b'_y}; \quad \frac{2b'_z}{b'_y} = \frac{b_z}{b_y} + \frac{b''_x}{b''_y}.$$

Si la tangente perce les plans $a$, $b''$, $b$, $b'$ respectivement en M, N, P, Q, le rapport anharmonique de ces quatre points est égal à celui des quatre plans,

$$a_x = 0, \quad b''_x = 0, \quad \frac{a_x}{b''_x} = \frac{a_P}{b''_P}; \quad \frac{a_x}{b''_x} = \frac{a_Q}{b''_Q}$$

ou encore à

$$\frac{a_P}{b''_P} : \frac{a_Q}{b''_Q}.$$

Or, les équations de la tangente donnent, puisque $b_P \equiv 0$, $b'_Q \equiv 0$,

$$\frac{a_P}{a_y} = -\frac{b'_P}{b'_y} \quad \text{et} \quad \frac{b''_P}{b''_y} = \frac{2b'_P}{b'_y}; \quad \text{d'où} \quad \frac{a_P}{b''_P} = -\frac{1}{2}\frac{a_y}{b''_y}$$

$$\frac{a_Q}{a_y} = \frac{2b_Q}{b_y} \quad \text{et} \quad \frac{b''_Q}{b''_y} = -\frac{b_Q}{b_y}; \quad \text{d'où} \quad \frac{a_Q}{b''_Q} = -2\frac{a_y}{b''_y}$$

et finalement

$$\frac{a_P}{b''_P} : \frac{a_Q}{b''_Q} = \frac{1}{4}.$$

On a donc le résultat suivant, d'ailleurs bien connu :

*Dans la gerbe de Sturm, le complexe des tangentes est un complexe tétraédral dont le rapport anharmonique est* 1/4.

**65.** Nous passons à une autre série de propriétés de la gerbe G.

Nous avons vu que la courbe de cette gerbe déterminée par le point $y$ a pour équations

$$\frac{a_x b_y}{a_y b_x} = \frac{a'_x b'_y}{a'_y b'_x} = \frac{a''_x b''_y}{a''_y b''_x} = \omega.$$

Cherchons l'équation du cône circonscrit de sommet $y$; il suffit de remplacer $x$ par $y + kx$, puis d'éliminer $k$. Cette substitution donne la relation

$$a_y b_y + k a_x b_y = \omega (a_y b_y + k a_y b_x)$$

ou encore

$$a_y b_y (1 - \omega) + k a_x b_y - k\omega\, a_y b_x = 0$$

et deux autres analogues. L'élimination de $k$ et $\omega$ donne

$$\begin{vmatrix} a_x b_y & a_y b_x & a_y b_y \end{vmatrix} = 0.$$

*Cette équation représente le cône de sommet* y *circonscrit à la cubique de la gerbe qui passe par ce point* y.

Elle exprime aussi qu'un point $y$ d'une certaine courbe de la gerbe et un point $x$ pris en dehors sont sur une même bisécante de cette courbe.

Donc si l'on y regarde les $y$ comme variables, la relation précédente représente le lieu des points de rencontre des cubiques de la gerbe avec les bisécantes qu'on peut leur mener du point fixe $x$.

Echangeons les $x$ et les $y$ :

$$\begin{vmatrix} a_x b_y & a_y b_x & a_x b_x \end{vmatrix} = 0.$$

*Les bisécantes menées d'un point fixe* y *aux cubiques de la gerbe* G *rencontrent ces courbes sur une surface du quatrième ordre* $T_4$.

**66.** Si on remplace $x$ par les coordonnées de A (ou B), on annule deux colonnes du déterminant; donc A et B sont des points doubles de $T_4$; on voit de même que les droites $ab$, $a'b'$, $a''b''$ sont tout entières sur la surface.

La cubique de la gerbe déterminée par le point $y$ est sur la surface $T_4$, car les coordonnées de ses points rendent les termes des deux premières colonnes du déterminant proportionnels.

Il est géométriquement évident que le point $y$ est un point double de la surface $T_4$, car une droite par $y$ ne contient que deux autres points de $T_4$; au surplus, si l'on fait $x = y$ dans le déterminant précédent, les trois colonnes deviennent identiques, et l'on peut, par soustraction, obtenir deux colonnes de termes nuls.

Cherchons le cône des tangentes en $y$ à $T_4$; posons $x = y + kz$; le déterminant devient

$$| a_y b_y + k a_z b_y \quad a_y b_y + k a_y b_z \quad a_y b_y + k(a_y b_z + a_z b_y) + k^2 a_z b_z |.$$

Le terme en $k^2$ est

$$k^2 \left\{ \begin{array}{l} \quad | a_z b_y \quad a_y b_z \quad a_y b_y | + | a_y b_y \quad a_y b_z \quad a_y b_z + a_z b_y | \\ + | a_z b_y \quad a_y b_y \quad a_y b_z + a_z b_y | + | a_y b_y \quad a_y b_y \quad a_z b_z | \end{array} \right\}.$$

Le quatrième déterminant est nul; le second et le troisième se simplifient par soustraction de colonnes et l'un d'eux se détruit avec le premier; il reste

$$k^2 \, | a_y b_y \quad a_y b_z \quad a_z b_y |$$

Or, pour $z$ variable, cette expression égalée à zéro représente le cône de sommet $y$ circonscrit à la cubique de la gerbe qui passe par $y$.

*La surface* $T_4$ *a le point* y *pour point double et le cône tangent en ce point est le cône perspectif à la cubique de la gerbe déterminée par ce point* y.

**67.** La première surface polaire de $y$ relativement à $T_4$ est une surface cubique $T_3$, lieu des conjugués du point $y$ par rapport aux cubiques de la gerbe G. Elle admet A et B comme points simples et $y$ comme point double et elle touche en $y$ le même cône que la surface $T_4$.

Son équation s'obtient par l'application du symbole $\Sigma y \frac{d}{dx}$ au détermi-

nant $T_4$, ou, successivement, à chacune des colonnes de ce déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_y b_y & a_y b_x & a_x b_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x b_y & a_y b_y & a_x b_x \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_x b_y & a_y b_x & a_x b_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x b_y & a_y b_x & a_y b_x \end{vmatrix} ;$$

les deux derniers déterminants sont nuls et les deux premiers donnent

$$T_5 = \begin{vmatrix} a_x b_y - a_y b_x & a_y b_y & a_x b_x \end{vmatrix}$$

La courbe $c_7$ lieu des contacts des tangentes issues de $y$ se trouve sur $T_5$, car ses points rendent proportionnels les termes de la première et de la troisième colonne ; cette courbe $c_7$ est d'ailleurs aussi sur la surface $T_4$. La tangente en $y$ à la cubique de la gerbe passant par $y$ est tout entière sur la surface $T_5$, car ses points rendent proportionnels les termes de la première et de la seconde colonne du déterminant $T_5$.

*Le lieu des conjugués d'un point* y *par rapport aux cubiques de la gerbe* G *est une surface du troisième ordre, ayant le point* y *pour point double. Le cône des tangentes en* y *est perspectif à la cubique de la gerbe passant par* y*; la tangente en* y *à cette cubique est toute entière sur la surface.*

La seconde partie de cet énoncé nous est communiquée par M Servais.

**68.** On peut trouver, sous une autre forme, l'équation de la surface $T_3$ : l'égalité $\alpha a_x b'_x - \alpha' a'_x b_x = 0$ et deux analogues représentent trois quadriques circonscrites à une cubique variable

$$\frac{\alpha a_x}{b_x} = \frac{\alpha' a'_x}{b'_x} = \frac{\alpha'' a''_x}{b''_x}$$

de la gerbe G. Les plans polaires du point $y$ relatifs à ces quadriques sont représentés par

$$\alpha\,(a_y b'_x + a_x b'_y) - \alpha'\,(a'_y b_x + a'_x b_y) = 0$$

et par deux relations analogues ; le point $x$ commun à ces trois plans est le conjugué de $y$; le lieu de ce point s'obtient par élimination de $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ :

$$\begin{vmatrix} a_y b'_x + a_x b'_y & -(a'_y b_x + a'_x b_y) & 0 \\ a_y b''_x + a_x b''_y & 0 & -(a''_y b_x + a''_x b_y) \\ 0 & a'_y b''_x + a'_x b''_y & -(a''_y b'_x + a''_x b'_y) \end{vmatrix} = 0.$$

$a_y b'_x + a_x b'_y = 0$ représente le plan polaire de $y$ par rapport aux plans $a$ et $b'$; désignons-le par $\pi_{12}$. Soient de même $\pi_{25}$, $\pi_{51}$ ; $\pi_{31}$, $\pi_{32}$, $\pi_{15}$, les

plans polaires de $y$ par rapport aux couples de plans $a'b''$, $a''b$; $a'b$, $a''b'$, $ab''$. On aura

$$T_5 \equiv \begin{vmatrix} \pi_{12} & -\pi_{21} & 0 \\ \pi_{15} & 0 & -\pi_{51} \\ 0 & \pi_{25} & -\pi_{52} \end{vmatrix} \equiv \pi_{12}\pi_{25}\pi_{51} - \pi_{15}\pi_{52}\pi_{21} = 0.$$

*La surface* $T_5$ *est donc le lieu des points dont les produits des distances à deux triples de plans,* $\pi_{12}$, $\pi_{25}$, $\pi_{51}$ et $\pi_{15}$, $\pi_{52}$, $\pi_{21}$, *sont dans un rapport constant.* Ce rapport est d'ailleurs déterminé par le point $y$, qui appartient, comme nous l'avons vu, à la surface.

De plus la surface $T_5$ appartient à un faisceau dont deux surfaces particulières, $\pi_{12}\pi_{25}\pi_{51}$ et $\pi_{15}\pi_{52}\pi_{21}$ dégénèrent en trois plans. Le plan tangent en un point M de $T_5$ passe par l'intersection des plans polaires de M relatifs aux deux triples de plans ci-dessus.

*La construction du plan tangent en un point de* $T_5$ *est linéaire.*

Les éléments de la courbure de $T_5$ en M dépendent des mêmes éléments de la quadrique polaire de M ; or, celle-ci passe par l'intersection des quadriques polaires de M relativement aux deux angles trièdres $\pi_{12}\pi_{25}\pi_{51}$ et $\pi_{15}\pi_{52}\pi_{21}$ ; ces quadriques sont des cônes.

*La construction des éléments de la courbure en un point de* $T_5$ *dépend de l'intersection de deux cônes du second ordre.*

Un plan de chacun des trièdres $\pi$ coupe chaque plan de l'autre trièdre suivant une droite qui est tout entière sur $T_5$ ; ceci donne neuf droites de cette surface.

Les surfaces analogues à $T_4$ et $T_5$, dans les *gerbes de Reye et de Sturm* sont aussi respectivement du quatrième et du troisième ordre. Ce fait est connu.

**69**. Nous nous occuperons maintenant des plans tangents aux cubiques de la gerbe G

Les relations

$$\frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} = \frac{a'_x b'_y - a'_y b'_x}{a'_y b'_y} = \frac{a''_x b''_y - a''_y b''_x}{a''_y b''_y}$$

représentent, comme on l'a vu, la tangente en $y$ à la cubique de la gerbe qui passe par $y$. Les équations

$$\Sigma l \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} = 0, \quad \Sigma l = 0$$

représentent le faisceau des plans menés par cette tangente.

Pour qu'un de ces plans passe par deux points $z$ et $z'$, il faut que la première des relations précédentes soit satisfaite pour $x = z$ et $x = z'$. Ces substitutions nous donnent deux égalités qui, jointes à $\Sigma l = 0$, permettent d'éliminer $l, l', l''$. La résultante est

$$\left| \begin{array}{ccc} a_z b_y - a_y b_z, & a_{z'} b_y - a_y b_{z'} & a_y b_y \end{array} \right| = 0.$$

Si l'on regarde $y$ comme variable, on a le lieu des contacts des plans tangents menés de la droite $zz'$ aux courbes de la gerbe G.

*Dans la gerbe* G, *le lieu des contacts des tangentes qui s'appuient sur une droite donnée est une surface du quatrième ordre* $U_4$.

Cette surface est évidemment engendrée aussi par une infinité simple de courbes $c_7$, lieux des contacts des tangentes qui passent par un point de $zz'$.

Son équation est satisfaite aussi pour

$$\frac{a_z b_y - a_y b_z}{a_{z'} b_y - a_y b_{z'}} = \frac{a'_z b'_y - a'_y b'_z}{a'_{z'} b'_y - a'_y b'_{z'}} = \frac{a''_z b''_y - a''_y b''_z}{a''_{z'} b''_y - a''_y b''_{z'}}.$$

Ces relations représentent, en apparence, une cubique gauche $k_3$; mais, en posant $y = z + kz'$, on vérifie, par un calcul facile, qu'elles sont satisfaites pour toutes les valeurs de $k$; donc la courbe $k_3$ dégénère en une droite $zz'$ plus une conique ou un couple de droites. C'est ce dernier cas qui se réalise, car $k_3$ a visiblement pour bisécantes $ab$, $a'b'$ $a''b''$ et ces droites, n'étant pas dans un même plan, ne peuvent être trois bisécantes d'une même conique.

*Ainsi, la courbe* $k_3$ *se décompose en une droite* zz' *et deux droites réelles ou imaginaires s'appuyant à la fois sur* ab, a'b', a''b'', zz'.

On vérifie aussi que la surface $U_4$ passe par les points A et B et contient les droites $ab$, $a'b'$, $a''b''$.

**70.** Le résultat du n° précédent subit une réduction dans le cas de la *gerbe de Reye*.

Faisons encore, comme au n° 57,

$$a_x = x_1,\ a'_x = x_2,\ a''_x = x_3,\ b_x = x_1 - x_4,\ b'_x = x_2 - x_4,\ b''_x = x_3 - x_4,$$

L'équation de la surface $U_4$ devient

$$\left| \begin{array}{ccc} z_i(y_i - y_4) - y_i(z_i - z_4) & z'_i(y_i - y_4) - y_i(z'_i - z'_4) & y_i(y_i - y_4) \end{array} \right| = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3);$$

ou encore

$$\left| \begin{array}{ccc} y_i z_4 - z_i y_4 & y_i z'_4 - z'_i y_4 & y_i(y_i - y_4) \end{array} \right| = 0.$$

Soustrayons, de la seconde colonne, les termes de la première multipliés par $z_4 : z_1$; les termes de la seconde colonne seront alors divisibles par $y_1$; de sorte que, dans la *gerbe de Reye*, la surface $U_4$ se décompose en un plan contenant les droites $ab$, $a'b'$, $a''b''$, plus une surface du troisième ordre; car un calcul facile montre que le terme en $y_4$ de l'équation précédente n'est pas identiquement nul. Si l'on fait abstraction de ce plan $y_4$ qui ne satisfait pas aux conditions géométriques du problème, on retrouve ce théorème connu :

*Dans la gerbe de Reye, le lieu des contacts des plans tangents menés par une droite donnée est une surface du troisième ordre.*

Dans le cas de la *gerbe de Sturm*, on doit faire $a' \equiv b$, $a'' \equiv b'$ et l'on voit facilement que l'équation de la surface $U_4$ se décompose en $b_y = 0$, $b'_y = 0$ et une quadrique qui est alors le lieu cherché. Ce qui donne cet autre résultat connu :

*Dans la gerbe de Sturm, le lieu des contats des plans tangents menés par une droite donnée est une surface du second ordre.*

**71.** Si dans l'équation

$$| a_z b_y - a_y b_z \quad a_{z'} b_y - a_y b_{z'} \quad a_y b_y | = 0,$$

qui représente la surface $U_4$ pour la gerbe G, on remplace $y$ par $z$, les termes de la première colonne s'annulent, mais les termes des deux autres colonnes ne sont, en général, ni nuls ni proportionnels. Mais $z$ est un point quelconque de la droite $zz'$; donc cette droite tout entière est située sur la surface $U_4$ et en est une droite simple.

Une section de $U_4$ par un plan $\pi$ contenant $zz'$ se complète par une cubique, lieu des contacts du plan $\pi$ avec les cubiques de la gerbe qui le touchent.

Par le même raisonnement, on montre que ce lieu est une conique dans le cas de la *gerbe de Reye* et une droite dans la *gerbe de Sturm*. On a ainsi ce théorème dont la seconde et la troisième partie sont connues.

*Le lieu des contacts d'un plan avec les cubiques de la gerbe qui le touchent est du troisième, du second ou du premier ordre, suivant qu'il s'agit de la gerbe* G, *de celle de Reye ou de celle de Sturm.*

**72.** Cherchons à présent l'équation du plan osculateur en $y$ à la

cubique $c_5$ de la gerbe G qui est déterminée par le point $y$ et dont les équations sont

$$\frac{a_x b_y}{a_y b_x} = \frac{a'_x b'_y}{a'_y b'_x} = \frac{a''_x b''_y}{a''_y b''_x} = \omega.$$

Nous avons trouvé que le faisceau des plans tangents en $y$ est représenté par les relations

$$\Sigma l \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} = 0, \quad \Sigma l = 0.$$

Entre la première de ces égalités et les équations de $c_5$, on peut éliminer les $x$ et l'on obtiendra une relation du troisième degré en $\omega$; deux de ses racines sont égales au paramètre du point $y$ et celui-ci est visiblement $\omega = 1$. Pour que les deux égalités écrites en dernier lieu représentent un plan osculateur, il faut donc que l'équation en $\omega$ ait trois racines égales à l'unité, ou, ce qui revient au même, que le produit de ses trois racines soit 1, ou enfin que le coefficient de $\omega^5$ et le terme indépendant de $\omega$ aient une somme nulle.

Or, voici cette équation en $\omega$ résultant de l'élimination des $x$ :

$$\begin{vmatrix} \Sigma l \dfrac{a_i b_y - a_y b_i}{a_y b_y} & a_i b_y - \omega a_y b_i & a'_i b'_y - \omega a'_y b'_i & a''_i b''_y - \omega a''_y b''_i \end{vmatrix} = 0.$$

Dans les lignes de ce déterminant, $i$ prendra successivement les valeurs 1, 2, 3, 4. Le terme indépendant de $\omega$ et le coefficient de $\omega^5$ ayant une somme nulle, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} \Sigma l \dfrac{a_i b_y - a_y b_i}{a_y b_y} & a_i b_y & a'_i b'_y & a''_i b''_y \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} \Sigma l \dfrac{a_i b_y - a_y b_i}{a_y b_y} & b_i a_y & b'_i a'_y & b''_i a''_y \end{vmatrix} = 0.$$

On simplifie le premier déterminant en retranchant, de la première colonne, les termes des trois autres divisés respectivement par $a_y b_y$, $a'_y b'_y$, $a''_y b''_y$; on fait une opération analogue pour le second déterminant et l'on obtient

$$\begin{vmatrix} \Sigma l \dfrac{b_i}{b_y} & a_i b_y & a'_i b'_y & a''_i b''_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Sigma l \dfrac{a_i}{a_y} & b_i a_y & b'_i a'_y & b''_i a''_y \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$l[(baa'a'')\, b'_y b''_y + (abb'b'')\, a'_y a''_y] + l'[(b'aa'a'')\, b''_y b_y + (a'bb'b'')\, a''_y a_y]$$
$$+ l''[(b''aa'a'')\, b_y b'_y + (a''bb'b'')\, a_y a'_y] = 0.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer $l$, $l'$, $l''$ entre cette équation de condition et les relations qui définissent le plan tangent,

$$\Sigma l \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} = 0, \quad \Sigma l = 0.$$

La résultante est

$$\begin{vmatrix} \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} & (baa'a'')\, b'_y b''_y + (abb'b'')\, a'_y a''_y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$| \, a_x b_y - a_y b_x \quad (baa'a'')\, a_y b_y b'_y b''_y + (abb'b'')\, b_y a_y a'_y a''_y \quad a_y b_y \, | = 0.$$

Pour $x$ variable, c'est l'équation du plan osculateur cherché; pour $x$ fixe et $y$ variable, c'est l'équation du lieu des contacts des plans osculateurs menés à des courbes de la gerbe G et passant par le point fixe $x$.

*Si d'un point fixe, on mène des plans osculateurs aux cubiques de la gerbe* G, *le lieu des points d'osculation est une surface du septième ordre* $T_7$.

**73.** Les points de $T_7$ qui rendent proportionnels les termes de la première et de la troisième colonne constituent la courbe $c_7$, lieu des contacts des tangentes passant par $x$.

On voit que la surface $T_7$ a les points A et B pour points doubles, $x$ pour point simple; elle contient les droites $ab$, $a'b'$, $a''b''$, dont les points annulent une ligne du déterminant $T_7$ et les droites $aa'$, $a'a''$, $a''a$, $bb'$, $b'b''$, $b''b$, dont les points annulent les termes d'un mineur du déterminant.

La surface $T_7$ contient encore une certaine courbe $c$, dont les équations

$$(baa'a'')\, b'_y b''_y + (abb'b'')\, a'_y a''_y = (b'aa'a'')\, b''_y b_y + (a'bb'b'')\, a''_y a_y$$
$$= (b''aa'a'')\, b_y b'_y + (a''bb'b'')\, a_y a'_y$$

s'obtiennent en écrivant que les termes de la seconde et de la troisième colonne du déterminant $T_7$ sont proportionnels.

Un point de cette courbe satisfait à l'équation de $T_7$ quel que soit $x$; en d'autres mots, toutes les surfaces $T_7$ passent par cette courbe $c$, ou encore, en un point M de $c$, le plan osculateur à la cubique de la gerbe déterminée par M est indéterminé.

Si l'on observe que $(aa'a'')_i$ et $(bb'b'')_i$ sont respectivement les coor-

données de A et de B, les équations précédentes peuvent s'écrire symboliquement

$$b_A b'_y b''_y + a_B a'_y a''_y = b'_A b''_y b_y + a'_B a''_y a_y = b''_A b_y b'_y + a''_B a_y a'_y.$$

Si l'on pose $y = A + kB$, les membres de ces égalités deviennent tous trois

$$b_A b'_A b''_A + k^2 a_B a'_B a''_B.$$

Donc ces relations représentent deux quadriques ayant en commun la droite AB et dont l'intersection se complète par une cubique gauche. Les points de cette courbe ne peuvent définir des cubiques proprement dites de la gerbe G, car sinon leur plan osculateur serait déterminé. Ils doivent donc se trouver sur des courbes de la gerbe dégénérant en une droite et une conique.

Les plans menés par la tangente à la conique au point où elle est rencontrée par la droite forment évidemment le seul faisceau dont chaque élément rencontre le système de la droite et de la conique en trois points coïncidents.

Mais on a vu au commencement de ce chapitre que les cubiques dégénérées se composent des rayons s'appuyant sur $ab$, $a'b'$. $a''b''$ et des coniques reposant sur ces mêmes droites et passant par A et B; ainsi se trouvent engendrées deux surfaces, l'une du second, l'autre du quatrième ordre, ayant en commun les axes $ab$, $a'b'$. $a''b''$ et les deux droites qui s'appuient à la fois sur ces axes et sur AB. L'intersection de ces surfaces se complète par une cubique gauche, précisément celle dont nous venons de parler.

*Toutes les surfaces* $T_7$ *passent par la droite* AB *et par une cubique gauche, lieu des points doubles des courbes dégénérées de la gerbe.*

**74.** Pour étudier la surface analogue à $T_7$ dans le cas de la *gerbe de Reye*, faisons encore

$$a_y = y_1, \quad a'_y = y_2, \quad a''_y = y_3;$$
$$b_y = y_1 - y_4, \quad b'_y = y_2 - y_4, \quad b''_y = y_3 - y_4.$$

On vérifie aisément que l'on a, dans ce cas

$$(baa'a'') = (b'aa'a'') = (b''aa'a'') = +1,$$
$$(abb'b'') = (a'bb'b'') = (a''bb'b'') = -1.$$

Dans le déterminant

$$T_7 = \left| \begin{matrix} a_x b_y - a_y b_x & (baa'a'') a_y b_y b'_y b''_y + (abb'b'') b_y a_y a'_y a''_y \\ & a_y b_y \end{matrix} \right|,$$

les termes de la seconde colonne deviennent

$$y_i(y_i - y_4)(y_2 - y_4)(y_5 - y_4) - y_1 y_2 y_5 (y_i - y_4) \quad (i = 1, 2, 3);$$

ils sont tous divisibles par $y_4$ et $T_7$ se décompose en un plan $y_4$ et une surface $T_6$. On a ainsi le théorème connu :

*Dans la gerbe de Reye, le lieu des contacts des plans osculateurs menés par un point est une surface du sixième ordre.*

Pour la *gerbe de Sturm*, le résultat est beaucoup plus simple : lorsque l'on pose $a' \equiv b$, $a'' \equiv b'$, les déterminants $(baa'a'')$, $(b'aa'a'')$, $(a'bb'b'')$, $(a''bb'b'')$ sont nuls et l'équation du lieu considéré se réduit à

$$\begin{vmatrix} a_x b_y - a_y b_x & (abb'b'')\, a_y b_x^2 b'_y & a_y b_y \\ a'_x b'_y - a'_y b'_x & 0 & b_y b'_y \\ a''_x b''_y - a''_y b''_x & -(abb'b'')\, b_y b'^2_y b''_y & b'_y b''_y \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$(abb'b'')\, a_y b_y^3 b'^5_y b''_y \begin{vmatrix} \dfrac{a_x}{a_y} - \dfrac{b_x}{b_y} & 1 & 1 \\ \dfrac{b_x}{b_y} - \dfrac{b'_x}{b'_y} & 0 & 1 \\ \dfrac{b'_x}{b'_y} - \dfrac{b''_x}{b''_y} & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou enfin, après un petit calcul, et en faisant abstraction des facteurs $(abb'b'')\, b_y^2\, b'^2_y$,

$$a_y b_y b'_y b''_y \left[ 3\left(\frac{b_x}{b_y} - \frac{b'_x}{b'_y}\right) - \left(\frac{a_x}{a_y} - \frac{b''_x}{b''_y}\right)\right] = 0,$$

résultat conforme à celui que nous avons donné dans nos *Notes sur les cubiques gauches*.

*Dans la gerbe de Sturm, le lieu des contacts des plans osculateurs menés par un point est une surface du troisième ordre.*

**75.** L'équation de la surface $T_7$, relative à la gerbe G, établit une *liaison* entre les points $x$ et $y$. Cette liaison est très spéciale : elle fait correspondre, à tout point $y$, un plan passant par ce point. Si l'on identifie cette relation à une équation linéaire en $x$ représentant un plan donné $u$, on a trois égalités satisfaites pour un nombre fini de points $y$ situés dans le plan $u$. En d'autres termes, la liaison considérée représente un *système focal supérieur* (*).

(*) R. Sturm, *Math. Ann.*, t. 19 et 28. — Amesseder, *Journ. f. Math.*, t. 97. — Voss, *Math. Ann.*, t. 23.

Faisons observer que toute gerbe linéaire de cubiques gauches donne naissance à un système pareil et que M. STURM a déterminé, pour toutes ces gerbes, les caractéristiques du système focal en se servant de la géométrie dénumérative. Notre étude nous permet de retrouver des résultats de cet auteur et ceux-ci nous serviront de contrôle.

D'après une théorie connue, tout système focal supérieur a trois caractéristiques : 1° le nombre $\alpha$ de plans répondant à un point (ici $\alpha = 1$); 2° le nombre $\beta$ de points répondant à un plan; 3° le nombre $\gamma$ de fois qu'une droite est dans le plan focal d'un de ses points.

D'autre part, tout système focal supérieur a deux nombres ordinaux (*Gradzahlen*) : 1° l'ordre $m$ de la surface lieu des points dont les plans focaux forment une gerbe de sommet $x$; ce nombre est aussi la classe de la développable enveloppe des plans focaux des points d'une droite; pour la gerbe G, ce nombre est 7, pour la gerbe de Reye 6, pour celle de Sturm 3; — 2° la classe $n$ de la surface enveloppée par les plans focaux des points d'un plan; ce nombre est aussi l'ordre de la courbe gauche lieu des points dont les plans focaux passent par un axe.

Enfin, entre les caractéristiques et les nombres ordinaux, on a les relations

$$\alpha + \gamma = m, \quad \beta + \gamma = n.$$

Donc $\gamma$ vaut 6 dans la gerbe G, 5 dans celle de Reye, 2 dans celle de Sturm.

La détermination de $\beta$ ou de $n$ doit être différée.

**76.** Jusqu'ici nous avons pu éviter de résoudre les équations d'une cubique gauche par rapport aux $x$; pourtant, dans la recherche du plan osculateur, cette résolution n'a été que dissimulée. Il reste un certain nombre de questions pour lesquelles il ne parait guère possible de se priver de la représentation paramétrique explicite, encore que les calculs soient pénibles.

Afin de les simplifier un peu, nous les ferons pour la cubique particulière

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a'_x}{b'_x} = \frac{a''_x}{b''_x} = \omega,$$

en remettant, jusqu'au résultat final, l'introduction des facteurs $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, qui affectent les formes $a_x$, $a'_x$, $a''_x$.

Les équations précédentes résolues par rapport aux $x$ donnent

$$\rho x_i = (a - \omega b \quad a' - \omega b' \quad a'' - \omega b'')_i;$$

l'indice $i$ du déterminant indique que les symboles $a$, $b$, ··· doivent prendre, dans les lignes successives, les indices 1, 2, 3, 4, *sauf* $i$; de plus ce déterminant sera précédé du signe + ou — suivant que $i$ sera impair ou pair.

On peut écrire aussi, en ordonnant par rapport à $\omega$,

$$\rho x_i = (aa'a'')_i - \omega\,[(ba'a'')_i + (ab'a'')_i + (aa'b'')_i] \\ + \omega^2\,[(bb'a'')_i + (ba'b'')_i + (ab'b'')_i] - \omega^3\,(bb'b'')_i.$$

Remplaçons les $x$ par les expressions proportionnelles dans l'équation

$$\lambda a_x + \mu a'_x + \nu a''_x = 0$$

qui représente un plan $\pi$ passant par A. Après cette substitution, le terme indépendant de $\omega$ est identiquement nul, c'est à dire que l'équation du plan est vérifiée pour $\omega = 0$, et cette valeur du paramètre caractérise le point A. Divisant alors par $\omega$, on obtient une équation du second degré

$$\begin{Bmatrix} -\lambda\,(aba'a'') \\ -\mu\,(a'ab'a'') \\ -\nu\,(a''aa'b'') \end{Bmatrix} + \omega \begin{Bmatrix} \lambda\,[(abb'a'') + (aba'b'')] \\ +\mu\,[(a'ba'a'') + (a'ab'b'')] \\ +\nu\,[(a''ba'b'') + (a''ab'b'')] \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{Bmatrix} \lambda\,(abb'b'') \\ +\mu\,(a'bb'b'') \\ +\nu\,(a''bb'b'') \end{Bmatrix} = 0.$$

Les racines de cette équation sont les paramètres des points, autres que A, où le plan $\pi$ coupe la cubique gauche. Pour que ce plan soit tangent, il faut que les racines en $\omega$ soient égales, ce qui s'exprime par la relation

$$\begin{Bmatrix} \lambda\,[(abb'a'') + (aba'b'')] \\ +\mu\,[(a'bb'a'') + (a'ab'b'')] \\ +\nu\,[(a''ba'b'') + (a''ab'b'')] \end{Bmatrix}^2 = 4 \begin{Bmatrix} \lambda\,(aba'a'') \\ +\mu\,(a'ab'a'') \\ +\nu\,(a''aa'b'') \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \lambda\,(abb'b'') \\ +\mu\,(a'bb'b'') \\ +\nu\,(a''bb'b'') \end{Bmatrix}.$$

Cette équation est du second degré en $\lambda$, $\mu$, $\nu$ et, si ces paramètres sont considérés comme les coordonnées du plan $\pi$ dans la gerbe (A), l'équation précédente est l'équation tangentielle du cône projetant la cubique gauche du point A.

Si $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sont trois constantes, la relation ci-dessus exprime la condition pour que le plan $\varphi$ passant par A touche la cubique en un point autre que A. Introduisons alors les coefficients $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ : tout déterminant tel que $(abb'b'')$, $(abb'a'')$, $(aba'a'')$, ··· se trouvera multiplié par autant de facteurs $\alpha$ qu'il contient de symboles $a$. Ainsi l'équation précédente est

homogène et du quatrième degré en $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$. Mais, si l'on y substitue, à $\alpha$, $\alpha'$ $\alpha''$, les expressions $\frac{a_x}{b_x}$, $\frac{a'_x}{b'_x}$, $\frac{a''_x}{b''_x}$, on obtient une équation du huitième ordre.

*Les cubiques de la gerbe* G *qui sont tangentes à un plan passant par* A *engendrent une surface du huitième ordre.*

**77.** Les équations

$$\lambda a_x + \mu a'_x + \nu a''_x = 0$$
$$\lambda b_x + \mu b'_x + \nu b''_x = 0$$

représentent une bisécante de la cubique

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a'_x}{b'_x} = \frac{a''_x}{b''_x}.$$

Si les coefficients $\lambda$, $\mu$, $\nu$ vérifient la relation du n° précédent, la bisécante en question est une tangente; l'élimination de $\lambda$, $\mu$, $\nu$ donne le lieu des tangentes à la cubique, c'est-à-dire l'équation de la développable osculatrice à cette courbe.

Mais les deux équations de la bisécante donnent

$$\lambda : \mu : \nu = (a'_x b''_x - b'_x a''_x) : (a''_x b_x - b''_x a_x) : (a_x b'_x - a'_x b_x)$$

et la substitution, dans l'égalité du n° précédent, fournit l'équation suivante, dont le premier membre est un covariant important des six formes $a$, $a'$, $a''$, $b$, $b'$, $b''$.

$$\left\{\begin{array}{l} (a'_x b''_x - b'_x a''_x)\,[(abb'a'') + (aba'b'')] \\ + (a''_x b_x - b'_x a_x)\,[(a'b'a''b) + (a'b'b''a)] \\ + (a_x b'_x - b_x a'_x)\,[(a''b''ab') + (a''b''ba')] \end{array}\right\}^2$$

$$+ 4 \left\{\begin{array}{l} (a'_x b''_x - b'_x a''_x)\,(baa'a'') \\ + (a''_x b_x - b''_x a_x)\,(b'aa'a'') \\ + (a_x b'_x - b_x a'_x)\,(b''aa'a'') \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{l} (a'_x b''_x - b'_x a''_x)\,(abb'b'') \\ + (a''_x b_x - b''_x a_x)\,(a'bb'b'') \\ + (a_x b'_x - b_x a'_x)\,(a''bb'b'') \end{array}\right\} = 0.$$

En y considérant les $x$ comme constants, on a la condition pour que la développable osculatrice à la cubique donnée passe par un point $x$, ou la condition pour qu'une tangente de cette courbe passe par $x$.

Si l'on introduit les symboles $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, on voit que la relation précédente les contient, d'une façon homogène, au sixième degré; puis, si l'on remplace $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ par $\frac{a_X}{b_X}$, $\frac{a'_X}{b'_X}$, $\frac{a''_X}{b''_X}$, les X étant les coordonnées courantes, on a une équation du douzième degré en X.

*Les cubiques de la gerbe G qui envoient une tangente par un point donné engendrent une surface du douzième ordre.*

**78.** Soit $u_x = 0$ l'équation d'un plan quelconque; si l'on y remplace les $x$ par les fonctions de $\omega$ écrites au n° 76. on trouve une relation cubique en $\omega$ dont les racines sont les paramètres des points de rencontre de la cubique gauche avec le plan $u$. Voici cette relation

$$(uaa'a'') - \omega\,[(uba'a'') + (uab'a'') + (uaa'b'')]$$
$$+ \omega^2\,[(ubb'a'') + (uba'b'') + (uab'b'')] - \omega^3\,(ub'b'b'') = 0,$$

ou, en abrégé,

$$A_0\omega^3 + 3A_1\omega^2 + 3A_2\omega + A_3 = 0;$$

les indices des coefficients A sont les degrés des termes que ces symboles représentent par rapport aux $a$ et aussi par rapport aux $\alpha$, quand on aura introduit ces derniers paramètres.

C'est encore M. Sturm (*) qui a donné l'interprétation géométrique des formes invariantes de cette équation, dans le cas où la courbe est définie par la représentation paramétrique de Möbius ($x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$). Il a montré que le Hessien de la forme cubique a pour racines les paramètres des points de la cubique alignés sur le pôle du plan $u$ dans le système focal défini par la courbe. La droite $d$ qui joint ces points est associée au plan $u$ par l'intermédiaire de la cubique donnée; si celle-ci décrit une gerbe linéaire, la droite $d$ décrit une congruence.

Pareillement le covariant cubique représente un plan $v$ associé au plan $u$ et, quand la cubique décrit une gerbe, le plan $v$ enveloppe une surface.

Nous devons nous borner à indiquer ces problèmes; leur résolution, par la méthode actuelle, paraît en effet impraticable.

Le discriminant de la forme cubique est

$$4\,(A_0A_2 - A_1^2)(A_1A_3 - A_2^2) - (A_0A_3 - A_1A_2)^2;$$

son évanouissement représente, si les $u$ sont variables, l'équation tangentielle de la cubique gauche; si les $u$ sont constants, il exprime la condition pour que le plan $u$ soit tangent à la courbe. Le poids de ce discriminant est 6; donc, quand on introduira les paramètres $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$,

(*) R. Sturm, *Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve* (Journ. f. Math., t. 86).

ceux-ci figureront au sixième degré et quand enfin on remplacera $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ par $\frac{a_x}{b_x}$, $\frac{a'_x}{b'_x}$, $\frac{a''_x}{b''_x}$, on aura une équation du douzième degré en $x$.

*Les cubiques de la gerbe* G *qui touchent un plan donné engendrent une surface du douzième ordre.*

**79.** Les conditions pour que l'équation

$$A_0\omega^3 + 3A_1\omega^2 + 3A_2\omega + A_3 = 0$$

ait trois racines égales, ou que la cubique oscule le plan $u$, sont exprimées par les relations

$$\frac{A_0}{A_1} = -\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3}.$$

Une de ces relations sera du second degré en $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$; une autre sera du troisième degré et il y aura donc, en général, six systèmes de valeurs communes.

*Il y a six cubiques de la gerbe* G *qui osculent un plan donné.*

Ainsi se trouve complétée l'étude du système focal supérieur défini au n° 75; sa seconde caractéristique est donc $\beta = 6$ et le second nombre ordinal est

$$n = \beta + \gamma = 12,$$

ce qui est conforme aux résultats obtenus par M. Sturm.

**80.** Les conditions pour que l'équation du n° 78,

$$\begin{aligned}(uaa'a'') &- \omega\,[\,ub'a'') + (uab'a'') + (uaa'b'')] \\ &+ \omega^2\,[(ubb'a'') + (uba'b'') + (uab'b'')] - \omega^3\,(ubb'b'') = 0\end{aligned}$$

soit vérifiée pour toute valeur de $\omega$, c'est-à-dire pour que la cubique gauche dégénère en une conique (ou un couple de droites) dans un plan $u$, plus une droite, sont exprimées par les relations

$$\begin{gathered}(uaa'a'') = 0, \\ (uba'a'') + (uab'a'') + (uaa'b'') = 0, \\ (ubb'a'') + (ub\,a'b'') + (uab'b'') = 0, \\ (ubb'b'') = 0.\end{gathered}$$

La première et la quatrième montrent que le plan $u$ doit passer par les points A et B.

En éliminant les $\alpha$ entre les relations précédentes, on a la condition générale pour que la cubique dégénère :

$$\begin{vmatrix} (aa'a'')_i & (ba'a'')_i + (ab'a'')_i + (aa'b'')_i & (bb'a'')_i + (ba'b'')_i + (ab'b'')_i & (bb'b'')_i \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre est un invariant simultané des formes $a, a', a''$, $b, b', b''$; on doit donc pouvoir l'exprimer sous forme d'une somme de produits de déterminants à quatre lignes.

En décomposant les termes de la seconde et de la troisième colonne, on a une somme de neuf déterminants, dont l'un sera par exemple

$$\Delta = \begin{vmatrix} (aa'a'')_i & (ba'a'')_i & (bb'a'')_i & (bb'b'')_i \end{vmatrix}.$$

Pour le transformer, multiplions-le par $(bb'a'a'')$, en appliquant la règle de la multiplication des déterminants; nous aurons

$$\Delta \times (bb'a'a'') = \begin{vmatrix} (baa'a'') & 0 & 0 & 0 \\ (b'aa'a'') & (b'ba'a'') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a'bb'a'') & (a'bb'b'') \\ 0 & 0 & 0 & (a''bb'b'') \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\Delta \times (bb'a'a'') = (baa'a'')\ (b'ba'a'')\ (a'bb'a'')\ (a''bb'b''),$$
$$\Delta = -(baa'a'')\ (a'bb'a'')\ (a''bb'b'').$$

On trouve des expressions analogues pour les huit autres déterminants.

La somme de ces neuf quantités s'annule quand la cubique dégénère. Si alors, on introduit, dans l'équation, les coefficients $\alpha, \alpha', \alpha''$, tous les termes contiendront $\alpha\alpha'\alpha''$ en facteur commun, puisque chacun des produits tels que $\Delta$ contient un des déterminants $(baa'a'')$, $(b'aa'a'')$, $(b''aa'a'')$.

Après suppression du facteur commun, l'équation est du troisième degré en $\alpha, \alpha', \alpha''$; donc quand on remplace ces paramètres par $\frac{a_x}{b_x}$, $\frac{a'_x}{b'_x}$, $\frac{a''_x}{b''_x}$, on a une égalité du sixième ordre. D'après le n° 46 elle représente une quadrique et une surface du quatrième degré engendrées par des cubiques dégénérées de la gerbe G.

# THÈSES ANNEXÉES.

I.

La Géométrie, en appliquant la théorie de l'élimination entre deux équations algébriques, n'utilise guère que la condition d'existence d'une seule racine commune. Les conditions pour que les équations aient plus d'une racine commune peuvent aussi donner des résultats géométriques intéressants.

II.

La construction de la sphère osculatrice à une cubique gauche est un problème du second degré.

III.

Si $a_x^m = 0$, $b_x^n = 0$ représentent des surfaces d'ordres respectifs $m$ et $n$, les équations

$$\frac{a_x^m}{b_x^n} = \frac{a_x'^m}{b_x'^n} = \frac{a_x''^m}{b_x''^n}$$

représentent une courbe gauche. Cette figure n'a été étudiée que dans le cas de $m = n = 1$. Pour $m = 2$ et $n = 1$, on a une ligne du septième ordre; quelques unes de ses propriétés se déduisent immédiatement des équations ci-dessus.

IV.

Dans tout connexe $(1, n)$ de l'espace, la surface *relative* à un point quelconque est unicursale.

# Autres publications de l'Auteur.

---

**Sur la courbure des Lignes et des Surfaces** (Mém. in-8° de l'Acad. royale de Belgique, 1897).

**Sur la polarité dans les courbes gauches du 4e ordre (1e espèce) et du 3e ordre** (Bullet. de l'Acad. royale de Belgique, 1900).

**Notes sur les cubiques gauches** (Ibid. 1901).

**Recherches relatives aux connexes de l'espace** (Mém. in-8° de l'Acad. royale de Belgique, 1901).

**Précis d'Histoire naturelle** (Namur, WESMAEL-CHARLIER; texte bilingue) :

I. Introduction à l'Histoire naturelle, à l'usage des Écoles moyennes, 1898.

II. Zoologie et Botanique, à l'usage des Athénées et des Écoles moyennes, 1894.

III. Physique, à l'usage des Écoles moyennes, 1900 (en collaboration avec M. H. MANDART).

IV. Chimie, Hygiène, à l'usage des Écoles moyennes, 1901 (en collaboration avec M. H. MANDART).

Articles divers dans *Mathesis*, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, etc.

SOUS PRESSE : **Sur les plans qui coupent, en six points d'une conique, un système de lignes de l'espace** (Ibid.).

FEB 13 1912
MAY 8 1913
APR 23 1912
FEB 4 1913
OCT 31 1917

Math 8589.02.3
Etude de quelques surfaces algebr
Cabot Science 003354364
3 2044 091 921 577